Derivate parziali seconde

Ordine di derivazione

Teorema 1 (Teorema di Schwarz). *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su Ω. Se per una coppia di indici diversi*

$$1 \le i \le d \qquad e \qquad 1 \le j \le d\,,$$

le derivate parziali $\partial_{ij}F$ e $\partial_{ji}F$ sono continue nel punto $X_0 \in \Omega$, allora

$$\partial_{ij}F(X_0) = \partial_{ji}F(X_0).$$

Dimostrazione in dimensione due. Supponiamo che $d = 2$ e $X_0 = (x, y)$.
Per ogni $h, k \in \mathbb{R}$, consideriamo l'espressione

$$F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y).$$

Fissati y e k, la funzione

$$f(t) = F(t, y+k) - F(t, y)$$

è derivabile in t ed esiste $h' \in (0, h)$ tale che

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y) &= f(x+h) - f(x) \\ &= hf'(x+h') \\ &= h\Big(\partial_x F(x+h', y+k) - \partial_x F(x+h', y)\Big). \end{aligned}$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Lagrange, si ha

$$\partial_x F(x+h', y+k) - \partial_x F(x+h', y) = k\,\partial_y\partial_x F(x+h', y+k'),$$

per un qualche $k' \in (0, k)$. Quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)}{hk} = \partial_y\partial_x F(x, y).$$

Ora, fissiamo x e k e consideriamo la funzione

$$g(s) = F(x+h, s) - F(x, s).$$

Ora, per ogni k, esiste $k'' \in (0, k)$ tale che

$$\begin{aligned} F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y) &= g(y+k) - g(y) \\ &= k\,g'(y+k'') \\ &= k\Big(\partial_y F(x+h, y+k'') - \partial_y F(x, y+k'')\Big). \end{aligned}$$

Come sopra, esiste $h'' \in (0, h)$ tale che

$$\partial_y F(x+h, y+k'') - \partial_y F(x, y+k'') = h\,\partial_x\partial_y F(x+h'', y+k''),$$

Quindi, per la continuità di $\partial_x\partial_y u$, si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - F(x, y+k) + F(x, y)}{hk} = \partial_x\partial_y F(x, y).$$

□