Una dimostrazione alternativa del Teorema di Taylor

Il lemma principale

Lemma 1. *Sia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile su $[0,1]$, con derivata $g' : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua e a sua volta derivabile in $[0,1]$ con derivata seconda $g'' : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua.*
Allora, esiste $\theta \in [0,1]$ tale che

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + (1-\theta)\Big(g''(\theta) - g''(0)\Big).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \,, \qquad \varphi(t) := g(t) + (1-t)g'(t).$$

Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt\,.$$

Ora, calcoliamo

$$\varphi(1) - \varphi(0) = g(1) - g(0) - g'(0) \qquad \text{e} \qquad \varphi'(t) = (1-t)g''(t)\,,$$

e otteniamo la formula

$$g(1) - g(0) - g'(0) = \int_0^1 (1-t)g''(t)\,dt\,.$$

Infine, siccome

$$\frac{1}{2}g''(0) = \int_0^1 (1-t)g''(0)\,dt,$$

otteniamo

$$g(1) - g(0) - g'(0) - \frac{1}{2}g''(0) = \int_0^1 (1-t)\big(g''(t) - g''(0)\big)\,dt.$$

Siccome la funzione

$$h : [0,1] \to \mathbb{R} \,, \qquad h(t) = (1-t)\big(g''(t) - g''(0)\big)$$

è continua su $[0,1]$, possiamo applicare il teorema della media integrale. Di conseguenza, esiste $\theta \in (0,1)$ tale che

$$(1-\theta)\big(g''(\theta) - g''(0)\big) = h(\theta) = \int_0^1 h(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\big(g''(t) - g''(0)\big)\,dt,$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$

Un lemma sulle forme bilineari

Lemma 2. *Siano $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$ due vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times n$ con coefficienti reali. Allora

$$Y \cdot AX = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq |X||Y| \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \dots, n$ consideriamo i vettori riga

$$A_j = (a_{j1}, a_{j2} \dots, a_{jn}) \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che possiamo scrivere il vettore AX come

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot X \\ \vdots \\ A_n \cdot X \end{pmatrix},$$

e quindi la sua norma euclidea è data da

$$|AX| = \left(\sum_{j=1}^{N} (A_j \cdot X)^2 \right)^{1/2}.$$

Allora, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, abbiamo

$$Y \cdot AX \leq |Y| \left(\sum_{j=1}^{N} (A_j \cdot X)^2 \right)^{1/2} \leq |Y| \left(\sum_{j=1}^{N} |A_j|^2 |X|^2 \right)^{1/2} \leq |Y|\,|X| \left(\sum_{j=1}^{N} |A_j|^2 \right)^{1/2}.$$

il che conclude la dimostrazione del lemma. □

Per ogni matrice $n \times n$ a coefficienti reali,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

useremo la notazione

$$\|A\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema di Taylor

Teorema 3. *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$. Allora*

$$F(X) = F(X_0) + \sum_{i=1}^{d} \partial_i F(X_0)\big(X^i - X_0^i\big) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \partial_{ij} F(X_0)\big(X^i - X_0^i\big)\big(X^j - X_0^j\big) + o\big(|X - X_0|^2\big).$$

Dimostrazione. Sia $Y = X - X_0 = (y_1, \dots, y_n)$. Consideriamo la funzione

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}\ , \qquad g(t) = F(X_0 + tY).$$

Calcoliamo prima le derivate $g'(t)$ e $g''(t)$. Usando la formula per la derivata direzionale, otteniamo

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big[F(X_0 + tY)\Big] = Y \cdot \nabla F(X_0 + tY) = \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j F(X_0 + tY),$$

$$
\begin{aligned}
g''(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial}{\partial t}\Big[\partial_j F(X_0+tY)\Big] &= \sum_{j=1}^{n} y_j \Big(Y\cdot\nabla(\partial_j F)(X_0+tY)\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n} y_j \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i \partial_{ij} F(X_0+tY)\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_j y_i \partial_{ij} F(X_0+tY),
\end{aligned}
$$

che possiamo scrivere anche come

$$
g'(t) = Y\cdot\nabla F(X_0+tY) \qquad \text{e} \qquad g''(t) = Y\cdot\nabla^2 F(X_0+tY)[Y].
$$

La notazione $\nabla^2 F(X)[Y]$ indica che la matrice hessiana

$$
\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \partial_{11}F & \dots & \partial_{1n}F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}F & \dots & \partial_{nn}F \end{pmatrix}
$$

prima viene calcolata nel punto $X \in \Omega$ e poi applicata al vettore colonna $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ovvero

$$
\nabla^2 F(X)[Y] = \begin{pmatrix} \partial_{11}F(X) & \dots & \partial_{1n}F(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}F(X) & \dots & \partial_{nn}F(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.
$$

Applicando Lemma 1 alla funzione g abbiamo che

$$
\text{fissato} \quad Y \in \mathbb{R}^n \quad \text{esiste} \quad \theta_Y \in [0,1]
$$

(che a priori dipende da Y) tale che

$$
F(X) - F(X_0) - Y\cdot\nabla F(X_0) - \frac{1}{2} Y\cdot\nabla^2 F(X_0)[Y] = \frac{1}{2}(1-\theta_Y) Y\cdot\Big(\nabla^2 F(X_0+\theta_Y Y) - \nabla^2 F(X_0)\Big)[Y].
$$

ora, per il fatto che $\theta_Y \in [0,1]$ e per Lemma 2, abbiamo

$$
\left|\frac{1}{2}(1-\theta_Y) Y\cdot\Big(\nabla^2 F(X_0+\theta_Y Y) - \nabla^2 F(X_0)\Big)[Y]\right| \le |Y|^2 \big\|\nabla^2 F(X_0+\theta_Y Y) - \nabla^2 F(X_0)\big\|_2.
$$

Ora, per la continuità dei coefficienti di $\nabla^2 F$,

$$
\lim_{|Y|\to 0} \|\nabla^2 F(X_0+\theta_Y Y) - \nabla^2 F(X_0)\| = 0,
$$

e quindi abbiamo la tesi. $\square$