

## Sviluppo di Taylor di ordine superiore

**Teorema 1** (Teorema di Taylor). *Siano  $\Omega$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^k(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ . Allora*

$$F(X_0 + X) = \sum_{j=0}^k T_j(X) + o(|X|^k),$$

dove per ogni  $j = 0, \dots, k$ ,  $T_j$  è il  $j$ -esimo polinomio di Taylor in  $X_0$ , ovvero:

- $T_0$  è il polinomio costante:

$$T_0(X) = F(X_0) \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{R}^n.$$

- $P_1$  è dato da

$$T_1(X) = X \cdot \nabla F(X_0) = \sum_{i=1}^n \partial_i F(X_0) x_i \quad \text{per ogni } X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- $T_2$  è il polinomio

$$T_2(X) = \frac{1}{2} X \cdot \nabla^2 F(X_0)[X] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial_{ij} F(X_0) x_i x_j \quad \text{per ogni } X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

- per  $k \geq 3$ ,  $T_k$  è il polinomio

$$T_k(X) = \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \partial_{j_1 j_2 \dots j_k} F(X_0) x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_k} \quad \text{per ogni } X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

**Dimostrazione in dimensione due.** Useremo la notazione  $X = (x, y)$  e  $X_0 = (x_0, y_0)$ .

Ragionando per induzione, supponiamo che la tesi sia vera per un  $k \geq 1$ . Dimostriamo il teorema è vero anche per  $k + 1$ . Ora, siccome le funzioni

$$\partial_x F : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \partial_y F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sono di classe  $C^k$ , abbiamo

$$\partial_x F(x + x_0, y + y_0) = \sum_{j=0}^k P_j(x, y) + \varepsilon_1(x, y),$$

$$\partial_y F(x + x_0, y + y_0) = \sum_{j=0}^k Q_j(x, y) + \varepsilon_2(x, y),$$

dove  $P_j$  e  $Q_j$  sono i polinomi di Taylor delle funzioni  $\partial_x F$  e  $\partial_y F$  in  $(x_0, y_0)$ , mentre  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sono tali che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_1(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon_2(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^k} = 0. \quad (1)$$

Ora, fissiamo  $(x, y)$  in intorno di  $(0, 0)$  e calcoliamo

$$\begin{aligned}
F(x + x_0, y + y_0) - F(x_0, y_0) &= \int_0^1 (x, y) \cdot \nabla F(x_0 + sx, y_0 + sy) ds \\
&= \int_0^1 x \partial_x F(x_0 + sx, y_0 + sy) ds + \int_0^1 y \partial_y F(x_0 + sx, y_0 + sy) ds \\
&= \int_0^1 x \left( \sum_{j=0}^k P_j(sx, sy) + \varepsilon_1(sx, sy) \right) ds \\
&\quad + \int_0^1 y \left( \sum_{j=0}^k Q_j(sx, sy) + \varepsilon_2(sx, sy) \right) ds \\
&= \int_0^1 x \left( \sum_{j=0}^k s^j P_j(x, y) + \varepsilon_1(sx, sy) \right) ds \\
&\quad + \int_0^1 y \left( \sum_{j=0}^k s^j Q_j(x, y) + \varepsilon_2(sx, sy) \right) ds \\
&= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j} \left( x P_j(x, y) + y Q_j(x, y) \right) + \int_0^1 \left( x \varepsilon_1(sx, sy) + y \varepsilon_2(sx, sy) \right) ds.
\end{aligned}$$

Ora, siccome

$$T_0(x, y) = F(x_0, y_0)$$

e per ogni  $j \geq 0$ , si ha

$$T_{j+1}(x, y) = \frac{1}{j} \left( x P_j(x, y) + y Q_j(x, y) \right),$$

otteniamo

$$F(x + x_0, y + y_0) = \sum_{j=0}^{k+1} T_j(x, y) + \int_0^1 \left( x \varepsilon_1(sx, sy) + y \varepsilon_2(sx, sy) \right) ds.$$

Infine, siccome

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2})^{k+1}} \int_0^1 \left( x \varepsilon_1(sx, sy) + y \varepsilon_2(sx, sy) \right) ds = 0,$$

abbiamo la tesi. □