Matrici simmetriche a coefficienti reali

Un'osservazione sulle matrici hessiane ed il teorema di Schwarz

Dati un aperto Ω in $\mathbb{R}^2$ e una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 su Ω, consideriamo la matrice hessiana

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$$

Osserviamo che siccome le derivate parziali seconde di F sono continue (per definizione di $C^2(\Omega)$), il teorema di Schwarz implica che

$$\partial_{xy}F = \partial_{yx}F \qquad \text{su} \qquad \Omega.$$

Quindi, abbiamo ottenuto che:

$$\boxed{\text{se } F \in C^2(\Omega), \text{ allora la matrice } \nabla^2 F \text{ è simmetrica.}}$$

Più in generale, se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e se una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 su Ω, allora la matrice hessiana

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \partial_{11}F & \cdots & \partial_{n1}F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{1n}F & \cdots & \partial_{nn}F \end{pmatrix} ,$$

calcolata in un qualsiasi punto $X \in \Omega$, è una matrice simmetrica.

Matrici simmetriche e polinomio caratteristico

Data una matrice $n \times n$ con coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

diciamo che A è simmetrica se

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{per ogni} \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Il polinomio caratteristico di A è definito come

$$\det(A - x\,\mathrm{Id})$$

ed è un polinomio (nella variabile x) di grado n con coefficienti reali.

Teorema Spettrale

Per il Teorema Spettrale, abbiamo che se una matrice A è simmetrica, allora il polinomio caratteristico di A ha n radici reali (contate con la molteplicità, il che vuol dire che alcune fra di loro possono essere uguali) dette autovalori di A, che indicheremo con

$$\lambda_1,\ \lambda_2\ ,\dots,\ \lambda_n\ .$$

In particolare, il polinomio caratteristico di A si può scrivere come

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}) = (-1)^n\big(x-\lambda_1\big)\big(x-\lambda_2\big)\cdots\big(x-\lambda_n\big).$$

Sempre per il Teorema Spettrale, ad ogni radice λ_j, $j = 1,\dots,n$, corrisponde un vettore E_j (detto autovettore di A) tale che

$$AE_j = \lambda_j E_j \qquad \text{per ogni} \qquad j = 1,\dots,n.$$

Inoltre, la famiglia di vettori

$$E_1,\ E_2,\ \dots,\ E_n$$

forma una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, ovvero:

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j\ , \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j\ , \end{cases}$$

ed ogni vettore $V \in \mathbb{R}^n$ si può esprimere come combinazione lineare di $E_1,\dots,E_n$, ovvero esistono numeri reali

$$\alpha_1,\, \alpha_2 \dots, \alpha_n$$

tali che

$$V = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n\,.$$

Traccia e determinante di una matrice simmetrica

Proposizione 1. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

una matrice simmetrica con autovalori $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Allora, abbiamo che:

- *la traccia di A (definita come $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$) è data da*

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\ ;$$

- *il determinante di A invece è dato da*

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\ .$$

Dimostrazione in dimensione due. Scriviamo la matrice A come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è dato da

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{pmatrix} = (a-x)(c-x) - b^2$$
$$= x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = x^2 - x\,\mathrm{tr}A + \det A.$$

Utilizzando la formula

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}) = (-1)^2\big(x-\lambda_1\big)\big(x-\lambda_2\big),$$

abbiamo che

$$x^2 - x\,\mathrm{tr}A + \det A = x^2 - x(\lambda_1+\lambda_1) + \lambda_1\lambda_2.$$

Di conseguenza,

$$\mathrm{tr}A = \lambda_1 + \lambda_1 \qquad \text{and} \qquad \det A = \lambda_1\lambda_2.$$

□

Dimostrazione in dimensione n. Utilizzeremo la formula

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}) = (-1)^n\big(x-\lambda_1\big)\big(x-\lambda_2\big)\cdots\big(x-\lambda_n\big).$$

Infatti, quando $x = 0$, si ha

$$\det A = (-1)^n\big(-\lambda_1\big)\big(-\lambda_2\big)\cdots\big(-\lambda_n\big) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\,.$$

Se invece applichiamo il principio di identita fra polinomi (due polinomi sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficienti), otteniamo che il coefficiente davanti a x^{n-1} dei polinomi

$$\det(A - x\,\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (-1)^n\big(x-\lambda_1\big)\big(x-\lambda_2\big)\cdots\big(x-\lambda_n\big).$$

deve essere lo stesso. Per il polinomio $(-1)^n\big(x-\lambda_1\big)\big(x-\lambda_2\big)\cdots\big(x-\lambda_n\big)$, questo coefficiente è:

$$(-1)^{n+1}\big(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n\big).$$

Nel caso di $\det(A - x\,\mathrm{Id})$ invece per la definizione stessa del determinante, abbiamo che il coefficiente davanti a x^{n-1} coincide con quello del polinomio

$$\big(a_{11}-x\big)\big(a_{22}-x\big)\cdots\big(a_{nn}-x\big),$$

il che vuol dire che è dato da

$$(-1)^{n-1}\big(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}\big).$$

Siccome $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$, abbiamo la tesi. □

Matrici simmetriche
semi-definite positive, semi-definite negative, definite positive, definite negative, ed indefinite

Definizione 2. *Sia A una matrice simmetrica $n \times n$ a coefficienti reali. Diciamo che:*

- *A è* **semi-definita positiva***, se*

$$V \cdot AV \geq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad V \in \mathbb{R}^n\,;$$

- *A è* **semi-definita negativa***, se*

$$V \cdot AV \leq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad V \in \mathbb{R}^n\,;$$

- *A è* **definita positiva** *;*

$$V \cdot AV > 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,;$$

- *A è* **definita negativa** *;*

$$V \cdot AV < 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\,;$$

- *A è* **indefinita** *, se non è né semi-definita positiva, né semi-definita negativa, ovvero se esistono vettori $V \in \mathbb{R}^n$ e $W \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$V \cdot AV > 0 \qquad e \qquad W \cdot AW < 0\,.$$

In seguito dimostreremo due teoremi che permettono di stabilire il carattere di una matrice simmetrica. Il primo (Teorema 3) fornisce un criterio valido in tutte le dimensioni n. Il secondo (Teorema 4) invece vale siolo in dimensione due.

Teorema 3. *Sia A una matrice simmetrica $n \times n$ a coefficienti reali e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A. Allora,*

(1) *A è* **semi-definita positiva***, se e solo se*

$$\lambda_j \geq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, n\,;$$

(2) *A è* **semi-definita negativa***, se e solo se*

$$\lambda_j \leq 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, n\,;$$

(3) *A è* **definita positiva***, se e solo se*

$$\lambda_j > 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, n\,;$$

(4) *A è* **definita negativa***, se e solo se*

$$\lambda_j < 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, n\,;$$

(5) *A è* **indefinita** *, se e solo se esistono due autovalori λ_i e λ_j tali che*

$$\lambda_i > 0 \qquad e \qquad \lambda_j < 0\,.$$

Dimostrazione di (1). Siano $E_1, \ldots, E_n$ gli autovettori (di norma 1) relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Supponiamo ora che A sia semi-definita positiva. Sia E_j un autovettore (di norma 1) di A. Allora,

$$0 \leq E_j \cdot AE_j = E_j \cdot \big(\lambda_j E_j\big) = \lambda_j |E_j|^2 = \lambda_j.$$

Supponiamo che

$$\lambda_j \geq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad j = 1, \ldots, n\,.$$

Sia V un qualsiasi vettore in $\mathbb{R}^n$. Per il Teorema Spettrale, possiamo scrivere V come

$$V = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n,$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono coefficienti reali. Siccome

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \ , \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \ , \end{cases}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} V \cdot AV &= \big(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n\big) \cdot A\big(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n\big) \\ &= \big(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n\big) \cdot \big(\alpha_1 A E_1 + \alpha_2 A E_2 + \cdots + \alpha_n A E_n\big) \\ &= \big(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n\big) \cdot \big(\alpha_1 \lambda_1 E_1 + \alpha_2 \lambda_2 E_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n E_n\big) \\ &= \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \cdots + \lambda_n \alpha_n^2 \geq 0. \end{aligned}$$

La dimostrazione dei puntio (2), (3) e (4) è analoga. L'ultimo punto (5) segue invece dalla definizione di matrice indefinita e dai punti (1) e (2). $\square$

Teorema 4. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica 2×2 *a coefficienti reali. Allora,*

(1) *A è* **indefinita***, se e solo se*

$$\det A < 0\,;$$

(2) *A è* **definita positiva***, se e solo se*

$$\det A > 0 \qquad e \qquad \mathrm{tr} A > 0\,;$$

(3) *A è* **definita negativa***, se e solo se*

$$\det A > 0 \qquad e \qquad \mathrm{tr} A < 0\,;$$

(4) *A è* **semi-definita positiva***, se e solo se*

$$\det A \geq 0 \qquad e \qquad \mathrm{tr} A \geq 0\,;$$

(5) *A è* **semi-definita negativa***, se e solo se*

$$\det A \geq 0 \qquad e \qquad \mathrm{tr} A \leq 0\,.$$

Dimostrazione. Siano λ_1 e λ_2 gli autovalori di A. Useremo le formule

$$\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_1 \qquad \text{and} \qquad \det A = \lambda_1 \lambda_2.$$

Dimostriamo (1). Se $\det A < 0$, allora λ_1 e λ_2 sono due numeri reali di segno opposto. Di conseguenza, A è una matrice indefinita. Viceversa, se A è indefinita, allora $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ (oppure $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$). In entrambi i casi $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$.

Dimostriamo (2). Se $\det A > 0$, allora λ_1 e λ_2 sono due numeri dello stesso segno. Siccome $\mathrm{tr} A > 0$, abbiamo che necessariamente $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Di conseguenza, la matrice A è definita positiva. Viceversa, se A è definita positiva, allora $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Di conseguenza, $\mathrm{tr} A > 0$ e $\det A > 0$.

Le dimostrazioni di (3), (4) e (5) sono analoghe. $\square$