Convergenza uniforme

Sia $[a,b]$ un'intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ e siano $X:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ e $Y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ due funzioni limitate. Definiamo la distanza tra le funzioni X e Y (sull'intervallo $[a,b]$) come

$$\|X-Y\|_\infty := \sup\Big\{|X(t)-Y(t)| \ : \ t\in[a,b]\Big\}.$$

In particolare, si ha

$$\big|X(t)-Y(t)\big| \le \|X-Y\|_\infty \qquad \text{per ogni} \qquad t\in[a,b].$$

Definizione 1 (Convergenza uniforme). *Diremo che la successione di funzioni*

$$X_n:[a,b]\to\mathbb{R}^m.$$

converge uniformemente *alla funzione*

$$X:[a,b]\to\mathbb{R}^m,$$

se

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n-X\|_\infty = 0.$$

Osservazione 2. *Osserviamo che se la successione di funzioni X_n converge uniformemente a X, allora essa converge anche* **puntualmente***, ovvero*

$$\lim_{n\to+\infty} X_n(t) = X(t) \quad \textit{per ogni} \quad t\in[a,b].$$

Teorema 3 (Limite uniforme di funzioni continue). *Supponiamo che la successione di funzioni continue*

$$X_n:[a,b]\to\mathbb{R}^m$$

converge uniformamente (su $[a,b]$) alla funzione

$$X:[a,b]\to\mathbb{R}^m.$$

Allora, X è continua su $[a,b]$.

Dimostrazione. Sia $X\in[a,b]$. Mostreremo che X sia continua nel punto t.
Dato $\varepsilon>0$, cerchiamo $\delta>0$ con la proprietà seguente:

$$|X(t)-X(s)|\le\varepsilon \quad \text{per ogni} \quad s\in[a,b] \quad \text{tale che} \quad |t-s|<\delta.$$

Siccome X_n converge uniformemente a X possiamo trovare un indice $N>0$ tale per cui

$$\|X_N-X\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siccome $X_n:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ è continua esiste $\delta>0$ tale che:

$$|X_N(t)-X_N(s)|\le\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni} \quad s\in[a,b] \quad \text{tale che} \quad |t-s|<\delta.$$

Di conseguenza,

$$\text{per ogni} \quad s\in[a,b] \quad \text{tale che} \quad |t-s|<\delta,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}|X(t)-X(s)| &\le |X(t)-X_N(t)|+|X_N(t)-X_N(s)|+|X_N(s)-X(s)|\\ &\le \|X_N-X\|_\infty+|X_N(t)-X_N(s)|+\|X_N-X\|_\infty\\ &\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Definizione 4 (Successioni di Cauchy)**.** *Diciamo che la successione di funzioni*

$$X_n : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

è una **successione di Cauchy***, se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $N > 0$ *tale che*

$$\|X_n - X_m\|_\infty < \varepsilon \quad \textit{per ogni} \quad n, m \geq N.$$

Teorema 5 (Teorema di completezza - le successioni di Cauchy convergono)**.** *Sia*

$$X_n : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

una successione di Cauchy di funzioni continue. Allora, esiste una funzione continua

$$X : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

tale che X_n *converge uniformemente a* X*.*

La dimostrazione di questo teorema è una conseguenza del lemma seguente.

Lemma 6. *Sia*

$$Y_n : [a,b] \to \mathbb{R}^m$$

una successione di funzioni continue tale per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|Y_{n+1} - Y_n\|_\infty$$

converge. Allora:

(i) *per ogni* $t \in [a,b]$ *la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\big)$$

converge;

(ii) *la funzione* $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *definita come*

$$Y(t) := Y_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\big) \qquad \textit{per ogni} \quad t \in [a,b],$$

è il limite uniforme della successione di funzioni $Y_n : [a,b] \to \mathbb{R}$*.*

Dimostrazione. Per dimostrare (i) basta osservare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\big)$$

converge assolutamente. Infatti, siccome

$$\big|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\big| \leq \|Y_{n+1} - Y_n\|_\infty,$$

abbiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|Y_{n+1} - Y_n\|_\infty < +\infty\,.$$

Di conseguenza, la funzione $Y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ del punto (ii) è ben definita. Fissiamo $t \in [a,b]$. Per ogni $n \geq 1$ abbiamo

$$Y_n(t) := Y_1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(Y_{k+1}(t) - Y_k(t)\big).$$

In particolare,

$$|Y_n(t) - Y(t)| \le \left| \sum_{k=n}^{+\infty} \big(Y_{k+1}(t) - Y_k(t) \big) \right| \le \sum_{k=n}^{+\infty} \big| Y_{k+1}(t) - Y_k(t) \big| \le \sum_{k=n}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\|_\infty ,$$

e quindi

$$\|Y_n - Y\|_\infty = \sup_{t \in [0,T]} |Y_n(t) - Y(t)| \le \sum_{k=n}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\|_\infty .$$

Siccome, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\|_\infty$$

converge, abbiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \|Y_n - Y\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \left\{ \sum_{k=n}^{+\infty} \|Y_{k+1} - Y_k\|_\infty \right\} = 0. \qquad \square$$

Dimostrazione di Teorema 5. Siccome la successione $X_n : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ è di Cauchy, possiamo selezionare una successione crescente di indici $\{n_k\}_{k \ge 1}$ con la proprietà seguente:

$$\big\| X_{n_{k+1}} - X_{n_k} \big\|_\infty \le \frac{1}{2^k} \qquad \text{per ogni} \qquad k \ge 1 \,.$$

In particolare, abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\|_\infty \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Quindi esiste una funzione continua $X : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale per cui

$$\lim_{k \to \infty} \|X_{n_k} - X\|_\infty = 0.$$

Per dimostrare che la successione X_n converge a X fissiamo $\varepsilon > 0$. Sia ora $N > 0$ tale che

$$\|X_n - X_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni} \quad n, m \ge N.$$

Inoltre, siccome $X_{n_k} \to X$ uniformemente, esiste $K > 0$ tale che

$$\|X_{n_k} - X\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni} \quad k \ge K.$$

Scegliamo un indice n_k tale che

$$k \ge K \qquad \text{e} \qquad n_k \ge N.$$

Allora,

$$\|X_n - X\|_\infty \le \|X_n - X_{n_k}\|_\infty + \|X_{n_k} - X\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,,$$

per ogni $n \ge N$. $\square$