Insiemi di livello di funzioni di due variabili

Proposizione 1. *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$*,*

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : \Omega \to \mathbb{R}$$

due funzioni di classe C^1 *su* Ω*. Inoltre, siano*

$$H : \Omega \to \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^1 *su* Ω *e* $c \in \mathbb{R}$ *una costante tale che l'insieme di livello*

$$\{H = c\} := \Big\{(x, y) \in \Omega \;:\; H(x, y) = c\Big\}$$

è un compatto. Supponiamo che

$$(f, g) \cdot \nabla H = 0 \quad su \quad \{H = c\}$$

e fissiamo un dato iniziale

$$(x_0, y_0) \in \{H = c\}.$$

(i) *Mostrare che esiste una soluzione globale*

$$(x, y) : \mathbb{R} \to \Omega$$

del problema di Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

(ii) *Mostrare che se*

$$|(f, g)| \neq 0 \qquad e \qquad |\nabla H| \neq 0 \quad su \quad \{H = c\},$$

allora la soluzione di $(*)$ *è periodica.*

Dimostrazione di (ii): Per il teorema della funzione implicita, sappiamo che per ogni punto $(x_0, y_0) \in \{H = c\}$ vale una delle proprietà seguenti:

(A) esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ che dipendono dal punto ed una funzione

$$\alpha : (-2\varepsilon + x_0, x_0 + 2\varepsilon) \to (-\delta + y_0, y_0 + \delta)$$

di classe C^1 tale che

- Il rettangolo $\mathcal{R} = (-2\varepsilon + x_0, x_0 + 2\varepsilon) \times (-\delta + y_0, y_0 + \delta)$ è incluso in Ω;
- in $\mathcal{R}$ l'insieme di livello $\{H = c\}$ coincide con il grafico di α, ovvero per ogni $(x, y) \in \mathcal{R}$ si ha che

$$H(x, y) = c \qquad \text{se e solo se} \qquad y = \alpha(x).$$

(B) esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ che dipendono dal punto (x_0, y_0) ed una funzione

$$\beta : (-2\delta + y_0, y_0 + 2\delta) \to (-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$$

di classe C^1 tale che

- Il rettangolo $\mathcal{R} = (-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon) \times (-2\delta + y_0, y_0 + 2\delta)$ è incluso in Ω;
- in $\mathcal{R}$ l'insieme di livello $\{H = c\}$ coincide con il grafico di β, ovvero per ogni $(x, y) \in \mathcal{R}$ si ha che
$$H(x, y) = c \qquad \text{se e solo se} \qquad x = \beta(y).$$

Per ogni punto $(x, y) \in \{H = c\}$ consideriamo il rettangolo aperto

$$\mathcal{R}_{x,y} = (-\varepsilon + x, x + \varepsilon) \times (-\delta + y, y + \delta),$$

dove ε e δ sono le costanti da uno dei casi (A) e (B) sopra. La famiglia di rettangoli $\mathcal{R}_{x,y}$, $(x, y) \in \{H = c\}$, è un ricoprimento aperto di $\{H = c\}$. Esiste quindi un sottoricoprimento finito

$$\Big\{\mathcal{R}_{x_i,y_i} \;:\; i = 1, \dots, n\Big\}.$$

Per ogni punto (x_i, y_i), $i = 1, \dots, n$, chiameremo ε_i, δ_i, e α_i (oppure β_i) le costanti e le funzioni delle proposizioni (A) e (B) sopra. Ora, il teorema è una conseguenza del lemma seguente.

Lemma 2. *Sia $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la soluzione di $(*)$. Supponiamo che per un qualche $t \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$\big(x(t), y(t)\big) \in \mathcal{R}_{x_i,y_i}$$

con (x_i, y_i) che soddisfa (A). Allora, esistono due tempi T_- e T_+ tali che:

(i) $T_- < t < T_+$;

(ii) $x(T_-) = x_i - \varepsilon_i$ *e* $x(T_+) = x_i + \varepsilon_i$;

(iii) *per ogni $s \in (T_-\, , T_+)$, si ha che $y(s) = \alpha(x(s))$;*

(iv) *esiste $\kappa > 0$ tale che*
$$\big(x(s), y(s)\big) \notin \mathcal{R}_{x_i,y_i} \qquad \textit{per ogni} \qquad s \in (T_- - \kappa\, , T_-) \cup (T_+\, , T_+ + \kappa) \ ;$$

(v) *per ogni $(x, y) \in \{H = c\} \cap \mathcal{R}_{x_i,y_i}$ esiste un unico tempo $s \in (T_-\, , T_+)$ tale che*
$$(x, y) = \big(x(s), y(s)\big).$$

Dimostrazione. Per esercizio. □

Come corollario, otteniamo il risultato seguente.

Teorema 3. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che la costante $c > 0$ sia tale che:*

- *l'insieme di livello* $\{F = c\} := \Big\{(x, y) \in \Omega \;:\; F(x, y) = c\Big\}$ *è compatto.*
- $|\nabla F| \neq 0$ *su* $\{F = c\}$.

Allora, esistono un numero finito di curve

$$\sigma_i : [0, T_i] \to \Omega, \quad i = 1, \dots, n$$

tali che

- $\sigma_i : [0, T_i] \to \mathbb{R}^2$ *è di classe* C^1 $|\sigma_i'(t)| > 0$ *per ogni* $t \in [0, T_i]$*;*
- σ_i **è semplice**, *ovvero la funzione* $\sigma_i : [0, T_i) \to \mathbb{R}^2$ *è iniettiva;*
- σ_i **è chiusa** $\Big(\sigma_i(0) = \sigma_i(T_i)\Big)$ *e si ha che* $\sigma_i'(0) = \sigma_i'(T_i)$*;*
- $\{F = c\} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} Im(\sigma_i)$ *e per ogni coppia di indici $i \neq j$ si ha* $Im(\sigma_i) \cap Im(\sigma_j) = \emptyset$, *dove*
$$Im(\sigma_i) := \Big\{\sigma_i(t) \;:\; t \in [0, T_i]\Big\},$$
è il sostegno della curva σ_i.