Punti di equilibrio e stabilità

Teorema di Lyapunov I

Siano

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$;
- $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 in Ω ;
- $X_0 \in \Omega$ un punto critico per F.

La funzione $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, di classe C^1, è detta una **funzione di Lyapunov**, se

- X_0 è l'unico minimo (assoluto) di H in Ω;
- $\nabla H(X) \cdot F(X) \leq 0$ per ogni $X \in \Omega$.

Teorema 1 (Teorema di Lyapunov – versione 1)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 e $X_0 \in \Omega$ un punto critico per F. Sia $H : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di Lyapunov. Mostrare che X_0 è un* **punto d'equilibrio stabile** *(per l'equazione $X'(t) = F(X(t))$), ovvero*

$$\begin{aligned} &\textit{per ogni} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{(abbastanza piccolo) esiste} \quad \delta > 0 \quad \textit{tale che} \\ &\qquad \textit{per ogni dato iniziale} \quad Y_0 \in B_\delta(X_0) \\ &\qquad\qquad \textit{la soluzione} \quad Y(t) \quad \textit{rimane in} \quad B_\varepsilon(X_0) \quad \textit{per ogni} \quad t > 0\ . \end{aligned}$$

Dimostrazione: Senza perdità di generalità, possiamo supporre che $H(X_0) = 0$.

- Sia $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo tale che
  $$\overline{B_\varepsilon(X_0)} \subset \Omega\,.$$
  Fissiamo
  $$m = \min_{\partial B_\varepsilon(X_0)} H.$$
  Siccome X_0 è un punto di minimo stretto, abbiamo che $m > 0$. Ora, la continuità di H implica che l'insieme
  $$\Omega_m := \{x \in B_\varepsilon(X_0)\ :\ H(x) < m\}$$
  è un sottoinsieme aperto di $B_\varepsilon(X_0)$. Inoltre,
  $$X_0 \in \{x \in B_\varepsilon(X_0)\ :\ H(x) < m\}.$$

- **Scelta di δ.** Siccome Ω_m è un aperto, sappiamo che esiste $\delta > 0$ tale che
  $$B_\delta(X_0) \subset \Omega_m = \{x \in B_\varepsilon(X_0)\ :\ H(x) < m\}.$$

- **Conclusione.** Per concludere, dimostrare che se $Y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è la soluzione di
  $$Y'(t) = F(Y(t)), \qquad Y(0) \in Y_0 \quad \text{dove} \quad Y_0 \in B_\delta(X_0),$$
  allora
  $$H(Y(t)) \leq H(Y_0) < m \quad \text{per ogni} \quad t \geq 0.$$
  Di conseguenza,
  $$Y(t) \in B_\delta(X_0) \quad \text{per ogni} \quad t \geq 0.$$

Teorema di Lyapunov II

Siano

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$;
- $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 in Ω ;
- $X_0 \in \Omega$ un punto critico per F.

La funzione $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, di classe C^1, è detta una **funzione di Lyapunov stretta**, se

- X_0 è l'unico minimo (assoluto) di H in Ω;
- $\nabla H(X) \cdot F(X) < 0$ per ogni punto $X \in \Omega$ diverso da X_0.

Teorema 2 (Teorema di Lyapunov – versione 2)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 e $X_0 \in \Omega$ un punto critico per F. Sia $H : \Omega \to \mathbb{R}$ una* **funzione di Lyapunov stretta***. Mostrare che X_0 è un* **punto d'equilibrio asintoticamente stabile** *(per l'equazione $X'(t) = F(X(t))$), ovvero*

esiste $\delta > 0$ *tale che*

per ogni dato iniziale $Y_0 \in B_\delta(X_0)$

$$\textit{la soluzione}\quad Y(t) \quad \textit{di} \quad \begin{cases} Y'(t) = F(Y(t)) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \qquad \textit{è tale che} \quad \lim_{t\to\infty} Y(t) = X_0 \ .$$

Dimostrazione: Senza perdità di generalità, supponiamo che $H(X_0) = 0$.

- Sia $\varepsilon > 0$ tale che
$$\overline{B_\varepsilon(X_0)} \subset \Omega$$
e sia $0 < \delta \le \varepsilon$ tale che tutte le soluzioni $Y(t)$ con dato iniziale
$$Y(0) \in B_\delta(X_0)$$
sono contenute in $B_\varepsilon(X_0)$:
$$Y(t) \in B_\varepsilon(X_0) \quad \text{per ogni} \quad t \ge 0.$$
- Ora, supponiamo per assurdo che esiste una soluzione Y tale che
$$Y(0) \in B_\delta(X_0)$$
ed una successione crescente $T_n \to +\infty$ tale che
$$\text{la successione} \quad Y(T_n) \quad \text{non converge a} \quad X_0.$$
- Siccome la successione $Y(T_n)$ è limitata, possiamo supporre che la successione $Y(T_n)$ converege ad un qualche
$$Y_\infty \in \overline{B_\delta(X_0)} \subset \Omega.$$
- Ora, dal fatto che la funzione
$$t \mapsto H(Y(t))$$
sia strettamente decrescente, possiamo dedurre che
$$H(Y_\infty) = \lim_{n\to\infty} H(Y(T_n)) = \inf_{t\ge 0} H(Y(t)).$$

- Sia Z la soluzione del problema

$$Z'(t) = F(Z(t)), \qquad Z(0) = Y_\infty.$$

- Mostrare che, per ogni $S > 0$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} Y(T_n + S) = Z(S).$$

- In conclusione, abbiamo che

$$H(Y_\infty) = H(Z(0)) > H(Z(S)) = \lim_{n\to\infty} H(Y(T_n + S)) \geq H(Y_\infty).$$

Sistemi gradiente e stabilità

Proposizione 3. *Sia $\mathcal{E} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$ consideriamo il sistema*

$$X' = -\nabla\mathcal{E}(X)\,, \qquad X(0) = X_0.$$

Supponiamo che

$$\nabla\mathcal{E}(X_0) = 0 \qquad e \qquad \nabla^2\mathcal{E}(X_0) > 0,$$

dove $\nabla\mathcal{E}$ è il gradiente e $\nabla^2\mathcal{E}$ la matrice hessiana.

Allora X_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostrazione: Basta dimostrare che $\mathcal{E}$ sia una funzione di Lyapunov stretta e poi applicare il secondo teorema di Lyapunov. Bisogna quindi mostrare che $\nabla\mathcal{E} \neq 0$ in un intorno di X_0. Cominciamo col osservare che, siccome F è C^2, abbiamo

$$\nabla^2\mathcal{E}(Y) > 0 \quad \text{per ogni} \quad Y \in B_r(X_0).$$

Ora, se per assurdo esistesse $Y_0 \in B_r(X_0)$, allora la funzione

$$e(t) = \mathcal{E}\big((1-t)X_0 + tY_0\big)$$

sarebbe tale che

$$e'(0) = e'(1) = 0.$$

Per il teorema di Rolle, esiste(rebbe) $s \in (0,1)$ tale che

$$e''(s) = 0.$$

Calcoliamo

$$e''(s) = (Y_0 - X_0) \cdot \nabla^2\mathcal{E}\,[Y_0 - X_0],$$

dove la matrice hessiana è calcolata nel punto $\big((1-s)X_0 + sY_0\big)$. Quindi abbiamo che

$$(Y_0 - X_0) \cdot \nabla^2\mathcal{E}\,[Y_0 - X_0] = 0$$

in contraddizione con la stretta positività di $\nabla^2\mathcal{E}$.