Sistemi gradiente e campi gradiente

Supponiamo che $\mathcal{E} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe C^2. Sia $X_0 \in \mathbb{R}^d$ tale che:

- X_0 un minimo locale stretto di $\mathcal{E}$;
- esiste un intorno $B_r(X_0)$ di X_0 tale che X_0 sia l'unico punto critico di $\mathcal{E}$ in $B_r(X_0)$.

Allora, X_0 è un punto stabile e asintoticamente stabile per il problema

$$X'(T) = -\nabla\mathcal{E}(X(t)).$$

Esempio 1. *Questo risultato si appilica per esempio alle funzioni*

- $\mathcal{E}(x, y) = x^2 + y^2$
- $\mathcal{E}(x, y) = x^2 + y^4$
- $\mathcal{E}(x, y) = x^2 + xy + y^2$
- $\mathcal{E}(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

Sfortunatamente non tutte le funzioni (detti anche campi vettoriali) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sono riconducibili al gradiente di una funzione $\mathcal{E} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Esercizio 2. *Dimostrare che non esiste una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla F(x, y) = (-y, x) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluzione: Supponiamo per assurdo che esiste una funzione F tale che

$$\nabla F(x, y) = (-y, x).$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) = F(\cos t, \sin t).$$

Allora,

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\sin t\, \frac{\partial F}{\partial x}\big(\cos t, \sin t\big) + \cos t\, \frac{\partial F}{\partial y}\big(\cos t, \sin t\big) \\ &= -\sin t\,(-\sin t) + \cos t\, \cos t \\ &= 1. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$f(2\pi) - f(0) = \int_0^{2\pi} f'(t)\, dt = 2\pi.$$

D'altra parte

$$f(2\pi) - f(0) = F\big(\cos(2\pi), \sin(2\pi)\big) - F\big(\cos 0, \sin 0\big) = F(1, 0) - F(1, 0) = 0. \qquad \square$$

Esercizi sui campi gradiente

Esercizio 3. *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che*

$$f'(t)=0 \quad \textit{per ogni} \quad t\neq 0.$$

Dimostrare che $f'(0)=0$.

Esercizio 4. *Dire se esiste una funzione derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $f'(0)=0$ e $f'(t)=1$, per ogni $t\geq 0$.*

Esercizio 5. *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e tale che ∇f è della forma*

$$\nabla f(x,y)=\big(\alpha(x,y),0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che f è della forma

$$f(x,y)=g(x) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 6. *Dire se esiste una funzione derivabile $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(x+y^2,0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 7. *Dire se esiste una funzione derivabile $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(xy,1\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 8. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(1,0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 9. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(0,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 10. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(x,y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 11. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(y,x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 12. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(x^2,y^2\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 13. *Trovare una funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(x,y)=\big(y^2,x^2\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Esercizio 14. *Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}^2$ e tale che ∇f è della forma*

$$\nabla f(x,y)=\big(\alpha(x,y),0\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che la funzione α non dipende da y.

Esercizio 15. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e derivabile su* $\mathbb{R}^2$*. Supponiamo che esiste una funzione* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(x, y) = g(x, y)\big(-y, x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che la funzione f *è costante.*

Esercizio 16 (L'esercizio precedente senza l'ipotesi di continuità)**.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*

$$\nabla f(x, y) = g(x, y)\big(-y, x\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

È vero che f *deve essere costante?*

Esercizio 17. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione derivabile su* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione tale che*

$$\nabla f(x, y) = g(x, y)\big(x, y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dimostrare che f *è costante su ogni circonferenza*

$$\partial B_R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = R^2\big\}.$$

Esercizio 18. *Dire se esiste una funzione derivabile* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\big(x, y\big) \quad \textit{per ogni} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 19. *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ \nabla f(0, 0) \neq \nabla g(0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 20. *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\big\}, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 0\big\}. \end{cases}$$

Esercizio 21. *Dire se esistono due funzioni derivabili* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \partial B_1, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad \partial B_1. \end{cases}$$

Esercizio 22. *Sia*

$$X = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 0 \quad \textit{oppure} \quad y = 0\Big\}.$$

Dire se esistono due funzioni derivabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tali che*

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g \quad \textit{su} \quad \mathbb{R}^2 \setminus X, \\ \nabla f \neq \nabla g \quad \textit{su} \quad X. \end{cases}$$

Esercizio 23. *Siano* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *due funzioni derivabili tali che*

$$\nabla f(x, y) = \alpha(x, y) \nabla g(x, y),$$

per una qualche funzione $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. È vero che* $f = \textit{costante} \times g$ *?*