Funzioni lipschitziane

Definizione 1. *Sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che una funzione $F : K \to \mathbb{R}^m$ è Lipschitz, se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|F(X) - F(Y)| \leq L|X - Y| \quad \textit{per ogni} \quad X, Y \in K.$$

Proposizione 2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 su Ω. Allora, per ogni palla chiusa $\overline{B}_r(X_0) \subset \Omega$, esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$|F(X) - F(Y)| \leq L|X - Y| \quad \textit{per ogni} \quad X, Y \in \overline{B}_r(X_0).$$

Dimostrazione: Siano X, Y due punti in $\overline{B}_r(X_0)$. Allora, per ogni $t \in [0, 1]$, abbiamo che

$$tX + (1 - t)Y \in \overline{B}_r(X_0).$$

Consideriamo la funzione

$$f(t) := F\big(tX + (1 - t)Y\big).$$

Allora $f(0) = F(X)$, $f(1) = F(Y)$ e

$$f'(t) = (X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1 - t)Y\big).$$

Di conseguenza,

$$F(Y) - F(X) = \int_0^1 (X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1 - t)Y\big)\, dt.$$

Quindi, possiamo stimare

$$\begin{aligned}
|F(Y) - F(X)| &= \left|\int_0^1 (X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1 - t)Y\big)\, dt\right| \\
&\leq \int_0^1 \big|(X - Y) \cdot \nabla F\big(tX + (1 - t)Y\big)\big|\, dt \\
&\leq \int_0^1 |X - Y| \cdot |\nabla F|\big(tX + (1 - t)Y\big)\, dt \\
&\leq M|X - Y|,
\end{aligned}$$

dove Mè il massimo di $|\nabla F|$ in $\overline{B}_r(X_0)$. □