Continuità rispetto al dato iniziale

Proposizione 1. *Siano Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$, $F:\Omega\to\mathbb{R}^d$ una funzione localmente lipschitziana su Ω e $X_0\in\Omega$ un punto (dato iniziale) fissato. Supponiamo che*

$$Y:[0,T)\to\mathbb{R}^d \qquad e \qquad Z:[0,T)\to\mathbb{R}^d$$

siano due soluzioni di

$$\begin{cases} Y'(t)=F(Y(t)) & \textit{per ogni}\quad t\in(0,T) \\ Y(0)=Y_0 \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} Z'(t)=F(Z(t)) & \textit{per ogni}\quad t\in(0,T) \\ Z(0)=Z_0 \end{cases}$$

Supponiamo che $\overline{B}_r(X_0)\subset\Omega$ sia una palla tale che:

(a) $|F(X)-F(Y)|\le L|X-Y|$ *per ogni* $X,Y\in\overline{B}_r(X_0)$,

(b) $Y(t)\in B_r(X_0)$ *e* $Z(t)\in B_r(X_0)$ *per ogni* $t\in[0,T)$.

Allora

$$|Y(t)-Z(t)|\le e^{Lt}|Y_0-Z_0| \quad \textit{per ogni}\quad t\in[0,T).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$f(t)=|Y(t)-Z(t)|^2 \quad \text{per ogni}\quad t\in[0,T).$$

Calcoliamo la derivata

$$\begin{aligned} f'(t)&=\partial_t\big[|Y(t)-Z(t)|^2\big] \\ &=2\big(Y'(t)-Z'(t)\big)\cdot\big(Y(t)-Z(t)\big) \\ &=2\big(F(Y(t))-F(Z(t))\big)\cdot\big(Y(t)-Z(t)\big). \end{aligned}$$

Ora, per ipotesi, abbiamo che

$$\big|F\big(Y(t)\big)-F\big(Z(t)\big)\big|\le L|Y(t)-Z(t)|.$$

Di conseguenza,

$$f'(t)\le 2Lf(t).$$

e quindi

$$\partial_t\Big(f(t)e^{-2Lt}\Big)\le 0.$$

In conclusione,

$$e^{-2Lt}|Y(t)-Z(t)|^2\le|Y_0-Z_0|^2 \quad \text{per ogni}\quad t\in[0,T).$$

□