Un criterio per l'esistenza globale

Teorema 1. *Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione localmente lipschitziana e tale che '*

$$|F(X)| \le a|X| + b \qquad \text{per ogni} \qquad X \in \mathbb{R}^n,$$

dove a e b sono costanti positive. Allora, per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ X(0) = X_0, \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Supponiamo che la soluzione

$$X : [0, T) \to \mathbb{R}^n$$

sia definita su $[0, T)$. Allora, per ogni $t \in [0, T)$, sappiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big[|X(t)|^2\Big] = 2X'(t) \cdot X(t) &= 2F(X(t)) \cdot X(t) \\ &\le 2|F(X(t))|\,|X(t)| \le 2\big(a|X(t)| + b\big)|X(t)| \\ &\le (2a+1)|X(t)|^2 + b^2. \end{aligned}$$

Definiamo ora le costanti

$$A = 2a + 1 \qquad \text{e} \qquad B = b^2$$

e la funzione (di classe C^1 su $[0, T)$), definita come

$$\varphi(t) = |X(t)|^2.$$

Si ha quindi che

$$\varphi'(t) \le A\varphi(t) + B \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T).$$

di conseguenza,

$$\Big(e^{-At}\varphi(t)\Big)' \le Be^{-At} \quad \text{per ogni} \quad t \in [0, T).$$

Integrando in t abbiamo

$$e^{-At}\varphi(t) - \varphi(0) \le \int_0^t Be^{-As}\, ds,$$

ovvero

$$\varphi(t) \le e^{At}\varphi(0) + e^{At}\int_0^t Be^{-As}\, ds.$$

Di conseguenza, se $T < +\infty$ e $t_n \to T$ la successione $\varphi(t_n) = |X(t_n)|^2$ rimane limitata per $n \to \infty$. Si ha dunque che la soluzione è definita su $[0, +\infty)$.

Analogamente, siccome $Y(t) = X(-t)$ è soluzione di

$$\begin{cases} Y'(t) = -F(Y(t)) \\ Y(0) = X_0, \end{cases}$$

applicando lo stesso risultato a Y, otteniamo che X è definita su $(-\infty, 0]$. □