Seno, coseno e π

Seno e coseno

Teorema 1. *Esiste un'unica coppia di funzioni derivabili*

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad e \qquad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

tale che

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}, \\ y'(t) = x(t) \quad \textit{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad F(x, y) = (-y, x).$$

La funzione F è 1-Lipschitziana. Infatti,

$$\begin{aligned} |F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| &= |(-y_1, x_1) - (-y_2, x_2)| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|, \end{aligned}$$

per ogni coppia di punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) in $\mathbb{R}^2$. Quindi sono soddisfatte le condizioni del teorema di Cauchy-Lipschitz. Esiste quindi una funzione derivabile

$$X = (x, y) : (T_{min}, T_{max}) \to \mathbb{R}^2$$

tale che

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in (T_{min}, T_{max}), \\ X(0) = (1, 0), \end{cases}$$

dove (T_{min}, T_{max}) è l'intervallo massimale di esistenza di una soluzione. Per dimostrare che

$$T_{max} = +\infty \qquad \text{e} \qquad T_{min} = -\infty$$

ragioniamo per assurdo. Supponiamo che $T_{max} < +\infty$. Siccome la funzione F è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, l'unica possibilità è che esiste una successione

$$t_n \in (T_{min}, T_{max}) \ , \qquad t_n \to T_{max}$$

tale che

$$|X(t_n)| = \sqrt{x^2(t_n) + y^2(t_n)} \to +\infty.$$

D'altra parte, per ogni $t \in (T_{min}, T_{max})$, abbiamo

$$\frac{d}{dt}\Big[x(t)^2 + y(t)^2\Big] = 2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) = -2y(t)x(t) + 2x(t)y(t) = 0.$$

Quindi la funzione

$$t \mapsto x(t)^2 + y(t)^2$$

è costante su (T_{min}, T_{max}) e quindi

$$|X(t_n)| = |X(0)| = 1.$$

Assurdo. Quindi $T_{max} = +\infty$. Analogamente, $T_{min} = -\infty$. $\square$

Definizione 2. *Definiamo le funzioni seno e coseno come:*

$$\cos t := x(t) \qquad e \qquad \sin(t) = y(t),$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione 3. *Il seno ed il coseno sono funzioni di classe* C^∞ *su* $\mathbb{R}$. *Infatti, per costruzione si ha*

$$\cos' t = -\sin t \qquad e \qquad \sin' t = \cos t\,.$$

Inoltre, vale l'identità

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Definizione di π

Teorema 4. *Sia* $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\big(x(t), y(t)\big) = \big(\cos t\,,\, \sin t\,\big),$$

l'unica soluzione del sistema (1). *Allora esiste un numero reale positivo* $T > 0$ *tale che* $x(T) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che x non si annulla su $(0, +\infty)$. Siccome $x(0) = 1 > 0$, abbiamo che

$$x > 0 \quad \text{su} \quad (0, +\infty).$$

Ora, siccome

$$y' = x > 0 \quad \text{su} \quad (0, +\infty),$$

abbiamo che la funzione

$$y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}\,,$$

è strattamente crescente. Siccome $y(0) = 0$, abbiamo che

$$y(1) > 0,$$

ed inoltre,

$$y(t) \geq y(1) \quad \text{per ogni} \quad t \geq 1.$$

Ma allora, per $t \geq 1$,

$$x'(t) = -y(t) < -y(1),$$

e quindi

$$x(t) \leq x(1) - (t-1)y(1).$$

In particolare,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$$

in contraddizione con la positività di x. □

Definizione 5. *Definiamo* $\frac{\pi}{2}$ *come il più piccolo numero reale positivo tale che* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, *ovvero*

$$\frac{\pi}{2} = \min\{T > 0 \ : \ \cos T = 0\}.$$

In particolare,

$$\cos t > 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Parametrizzazione della circonferenza

Teorema 6. *La funzione*
$$x : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1],$$
è positiva, (strettamente) decrescente e bigettiva come funzione da $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *in* $[0, 1]$. *La funzione*
$$y : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1],$$
è positiva, (strettamente) crescente e bigettiva come funzione da $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *in* $[0, 1]$.
In particolare, per ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tale che*
$$x \geq 0 \ , \quad y \geq 0 \ , \quad x^2 + y^2 = 1 \ ,$$
esiste un unico $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *tale che*
$$\cos t = x \qquad e \qquad \sin t = y.$$

Lemma 7. *Abbiamo che*
$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \qquad e \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$
Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}$, *si ha*
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t \qquad e \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t.$$

Lemma 8 (Pari e dispari)**.** *La funzione coseno è pari:*
$$\cos(-t) = \cos t \qquad \text{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}.$$
La funzione coseno è dispari:
$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \text{per ogni} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Lemma 9 (Formule di addizione)**.** *Per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $t \in \mathbb{R}$ *si ha*
$$\begin{cases} \cos(\alpha + t) = \cos\alpha\, \cos t - \sin\alpha\, \sin t \\ \sin(\alpha + t) = \cos\alpha\, \sin t + \sin\alpha\, \cos t. \end{cases}$$

Lemma 10 (Periodicità)**.** *Per ogni* $t \in \mathbb{R}$, *abbiamo*

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t \quad e \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t;$
- $\cos(\pi + t) = -\cos t \quad e \quad \sin(\pi + t) = -\sin t;$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = \sin t \quad e \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) = -\cos t;$
- $\cos(2\pi + t) = \cos t \quad e \quad \sin(2\pi + t) = \sin t.$

Teorema 11. *Per ogni*
$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tale che} \quad x^2 + y^2 = 1,$$
esiste un unico $\theta \in \big[0, 2\pi\big)$ *tale per cui*
$$x = \cos\theta \qquad e \qquad y = \sin\theta.$$