Comportamento qualitativo delle soluzioni. Soluzioni periodiche. Esercizi

Esercizio 1. *Sia* $(x, y) : [0, T_{max}) \to \mathbb{R}^2$ *la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = \sin x, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Mostrare che il tempo massimale di esistenza della soluzione è $T_{max} = +\infty$. *Mostrare che esiste* $R > 0$ *tale che se* $x_0^2 + y_0^2 < R^2$, *allora la soluzione* (x, y) *è periodica.*

Esercizio 2. *Sia* $(x, y) : [0, T_{max}) \to \mathbb{R}^2$ *la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + x^3, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Trovare un integrale primo del sisitema e mostrare che il tempo massimale di esistenza della soluzione è $T_{max} = +\infty$. *Mostrare che la soluzione* (x, y) *è periodica.*

Esercizio 3. *Sia* $(x, y) : [0, T_{max}) \to \mathbb{R}^2$ *la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = f(x), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una funzione di classe* C^1 *tale che*

$$f(x) = x + o(x).$$

Mostrare che la soluzione (x, y) *è periodica.*

Esercizio 4. *Sia* $(x, y) : [0, T_{max}) \to \mathbb{R}^2$ *la soluzione del sistema*

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + x^{1000}y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Mostrare che la soluzione (x, y) *non è periodica.*