Le forme esatte sono chiuse

Le 1-forme esatte sono chiuse

Teorema 1 (Esatta $\Rightarrow$ chiusa per le 1-forme)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia*

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^2. Allora la 1-forma differenziale df è chiusa.

Dimostrazione in dimensione due. Consideriamo prima il caso $n = 2$. Allora $f = f(x, y)$ e

$$df = \partial_x f(x, y)\,dx + \partial_y f(x, y)\,dy.$$

Allora

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\Big(\partial_x f(x, y)\,dx + \partial_y f(x, y)\,dy\Big) \\
&= d(\partial_x f) \wedge dx + d(\partial_y f) \wedge dy \\
&= \Big(\partial_{xx} f(x, y)\,dx + \partial_{yx} f(x, y)\,dy\Big) \wedge dx + \Big(\partial_{xy} f(x, y)\,dx + \partial_{yy} f(x, y)\,dy\Big) \wedge dy \\
&= \partial_{yx} f(x, y)\,dy \wedge dx + \partial_{xy} f(x, y)\,dx \wedge dy \\
&= \Big(-\partial_{yx} f(x, y) + \partial_{xy} f(x, y)\Big)\,dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

Per il Teorema di Schwarz abbiamo che $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_{xy} f(x, y)$. $\square$

Dimostrazione in dimensione n. Siano $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Allora

$$df = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(X)\,dx_i.$$

Ora calcoliamo

$$\begin{aligned}
d(df) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \partial_i f(X)\,dx_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} d(\partial_i f) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j\right) \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i.
\end{aligned}$$

Ora siccome $dx_i \wedge dx_i = 0$ possiamo scrivere

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i + \sum_{1 \le j < i \le n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i.$$

Nella seconda sommatoria scambiamo le variabili i e j, cioè scriviamo i al posto di j e j al posto di i. Quindi

$$\sum_{1 \le j < i \le n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i = \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_i \partial_j f(X)\,dx_i \wedge dx_j.$$

In conclusione, usando l'identità $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, otteniamo che

$$\begin{aligned}
d(df) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_j \partial_i f(X)\,dx_j \wedge dx_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \partial_i \partial_j f(X)\,dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \Big(\partial_j \partial_i f(X) - \partial_i \partial_j f(X)\Big)\,dx_j \wedge dx_i = 0,
\end{aligned}$$

dove abbiamo di nuovo usato il teorema di Schwarz. $\square$

Forme differenziali di ordine superiore

Teorema 2 (Esatta $\Rightarrow$ chiusa)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia α una k-forma di classe C^2 su Ω. Allora la $(k+1)$-forma differenziale $d\alpha$ è chiusa.*

Dimostrazione in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Dal teorema precedente, segue che se α è una 0-forma (quindi una funzione), allora la 1-forma $d\alpha$ è chiusa. Dimostreremo il teorema partendo da una 1-forma α in $\mathbb{R}^3$. Questo concluderebbe la dimostrazione del teorema per le k-forme in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Il caso generale (per una k-forma in $\mathbb{R}^n$) è analogo.

Consideriamo quindi la 1-forma

$$\alpha = a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz.$$

Dimostreremo che la 2-forma $d\alpha$ è chiusa.

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d\Big(a(x,y,z)\,dx + b(x,y,z)\,dy + c(x,y,z)\,dz\Big)\\
&= da\wedge dx + db\wedge dy + dc\wedge dz\\
&= \Big(\partial_x a\,dx + \partial_y a\,dy + \partial_z a\,dz\Big)\wedge dx\\
&\qquad + \Big(\partial_x b\,dx + \partial_y b\,dy + \partial_z b\,dz\Big)\wedge dy\\
&\qquad\qquad + \Big(\partial_x c\,dx + \partial_y c\,dy + \partial_z c\,dz\Big)\wedge dz\\
&= \partial_y a\,dy\wedge dx + \partial_z a\,dz\wedge dx\\
&\qquad + \partial_x b\,dx\wedge dy + \partial_z b\,dz\wedge dy\\
&\qquad\qquad + \partial_x c\,dx\wedge dz + \partial_y c\,dy\wedge dz\\
&= \Big(\partial_x b - \partial_y a\Big)\,dx\wedge dy + \Big(\partial_z a - \partial_x c\Big)\,dz\wedge dx + \Big(\partial_y c - \partial_z b\Big)\,dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

Ora, calcoliamo $d(d\alpha)$.

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= d\Big(\big(\partial_x b - \partial_y a\big)\,dx\wedge dy + \big(\partial_z a - \partial_x c\big)\,dz\wedge dx + \big(\partial_y c - \partial_z b\big)\,dy\wedge dz\Big)\\
&= d\big(\partial_x b - \partial_y a\big)\wedge dx\wedge dy + d\big(\partial_z a - \partial_x c\big)\wedge dz\wedge dx + d\big(\partial_y c - \partial_z b\big)\wedge dy\wedge dz\\
&= \partial_z\big(\partial_x b - \partial_y a\big)dz\wedge dx\wedge dy + \partial_y\big(\partial_z a - \partial_x c\big)dy\wedge dz\wedge dx + \partial_x\big(\partial_y c - \partial_z b\big)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$dz\wedge dx\wedge dy = (dz\wedge dx)\wedge dy = (-dx\wedge dz)\wedge dy = -dx\wedge(dz\wedge dy) = -dx\wedge(-dy\wedge dz) = dx\wedge dy\wedge dz.$$

Analogamente

$$dy\wedge dz\wedge dx = dx\wedge dy\wedge dz.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= \partial_z\big(\partial_x b - \partial_y a\big)dx\wedge dy\wedge dz + \partial_y\big(\partial_z a - \partial_x c\big)dx\wedge dy\wedge dz + \partial_x\big(\partial_y c - \partial_z b\big)dx\wedge dy\wedge dz\\
&= \Big(\partial_{zx} b - \partial_{zy} a + \partial_{yz} a - \partial_{yx} c + \partial_{xy} c - \partial_{xz} b\Big)dx\wedge dy\wedge dz = 0.
\end{aligned}$$

□

Esempio di una forma chiusa che non è esatta

Le forme esatte sono sempre forme chiuse (vedi Teorema 2),
ma esistono forme chiuse che non sono esatte! Per esempio, la 1-forma

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

è chiusa, ma non esatta su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.