Forme chiuse in domini normali

Proposizione 1. *Siano*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

due funzioni di classe C^1 su $[a, b]$ e tali che

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni} \quad a < x < b.$$

Sia Ω l'insieme aperto

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b,\ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

Allora ogni 1-forma chiusa e di classe C^1 su Ω è esatta.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$h : [a, b] \to \mathbb{R} , \qquad h(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x).$$

Sia

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy.$$

una 1-forma chiusa di classe C^1 su Ω. Fissiamo un punto

$$a < x_0 < b$$

e, per ogni $(x, y) \in \Omega$ definiamo

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \Big[a\big(t, h(t)\big) + h'(t)\, b\big(t, h(t)\big)\Big]\, dt + \int_{h(x_0)}^{y} b(x, s)\, ds.$$

Ora, basta verificare che

$$\partial_x F(x, y) = a(x, y) \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x, y) = b(x, y).$$

□