1-forme chiuse in aperti stellati

Aperti stellati

Definizione 1. *Diciamo che l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è stellato rispetto al punto $X_0 \in \Omega$, se ha la proprietà seguente. Per ogni $X \in \Omega$ is segmento che collega X_0 a X sta in Ω:*

$$tX_0 + (1-t)X \in \Omega \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [0,1].$$

Esempio 2. *Gli insiemi convessi sono stellati.*

Esempio 3. *I rettangoli sono insiemi stellati.*

Esempio 4. *L'insieme* $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| < \sqrt{1+x^2}\Big\}$ *è stellato.*

Dimostrazione. Se $(x,y) \in \Omega$ e $t \in [0,1]$, allora:

$$|ty| = t|y| \le t\sqrt{1+x^2} = \sqrt{t^2 + (tx)^2} \le \sqrt{1+(tx)^2}.$$

Quindi anche $(tx, ty) \in \Omega$. □

Su un aperto stellato le forme chiuse sono esatte

Teorema 5 (Chiusa $\Rightarrow$ esatta)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, stellato rispetto al punto $X_0 \in \Omega$. Ogni 1-forma α, chiusa e di classe C^1 su Ω, è esatta.*

Dimostrazione. Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a_1(X)\,dx_1 + a_2(X)\,dx_2 + \cdots + a_n(X)\,dx_n,$$

e definiamo il campo vettoriale

$$A(X) = \big(a_1(X), \dots, a_n(X)\big),$$

associato ad α. Siccome la forma è chiusa, abbiamo che $d\alpha = 0$ ovvero

$$\begin{aligned}
0 = d\alpha &= d\Big(a_1(X)\,dx_1 + \cdots + a_n(X)\,dx_n\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j\Big) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i,
\end{aligned}$$

il che implica che per ogni coppia di indici $i \neq j$, abbiamo

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \qquad \text{in} \qquad \Omega.$$

Fissiamo un punto $X_0 \in \Omega$ e per ogni $X \in \Omega$ definiamo la funzione

$$F(X) := \int_\gamma \alpha,$$

dove γ è la curva

$$\gamma : [0,1] \to \Omega, \qquad \gamma(t) = (1-t)X_0 + tX.$$

Per la definizione di integrale di una 1-forma su una curva, abbiamo

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_0^1 A(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^1 A\big((1-t)X_0 + tX\big) \cdot (X - X_0)\, dt. \end{aligned}$$

Derivando sotto il segno dell'intagrale rispetto alla variabile x_j, abbiamo

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} F(X) &= \int_0^1 \partial_{x_j}\Big(\sum_{i=1}^n a_i\big((1-t)X_0 + tX\big)\big(x_i - x_{0i}\big)\Big)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(a_j\big((1-t)X_0 + tX\big) + \sum_{i=1}^n t\,\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\big((1-t)X_0 + tX\big)\big(x_i - x_{0i}\big)\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(a_j\big((1-t)X_0 + tX\big) + \sum_{i=1}^n t\,\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\big((1-t)X_0 + tX\big)\big(x_i - x_{0i}\big)\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(a_j\big((1-t)X_0 + tX\big) + t\,\frac{\partial}{\partial t}\Big[a_j\big((1-t)X_0 + tX\big)\Big]\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big[t\, a_j\big((1-t)X_0 + tX\big)\Big]\, dt = a_j(X). \end{aligned}$$

Quindi $dF = \alpha$ il che conclude la dimostrazione. □

Corollario 6. *In una palla $B_r(X_0) \subset \mathbb{R}^n$, di centro $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$, ogni 1-forma chiusa è esatta.*

Corollario 7. *In un rettangolo aperto*

$$\mathcal{R} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n,$$

ogni 1-forma chiusa è esatta.

In particolare, abbiamo anche ottenuto il teorema seguente.

Teorema: Sia

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3\ , \qquad \Phi(x,y,z) = \Big(a(x,y,z),\ b(x,y,z),\ c(x,y,z)\Big)$$

un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto stellato $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Se il campo Φ è irrotazionale, allora Φ è un campo conservativo, ovvero esiste una funzione (un potenziale) $P : \Omega \to \mathbb{R}$ tale per cui $\nabla P = \Phi$.

Dimostrazione. Siccome il campo Φ è conservativo, la 1-forma associata

$$\alpha = a(x,y,z)\, dx + b(x,y,z)\, dy + c(x,y,z)\, dz$$

è chiusa. Per il Teorema 5, abbiamo che α è esatta, ovvero esiste una funzione $P : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $dP = \alpha$. Ma allora

$$\partial_x P(x,y,z)\, dx + \partial_y P(x,y,z)\, dy + \partial_z P(x,y,z)\, dz = a(x,y,z)\, dx + b(x,y,z)\, dy + c(x,y,z)\, dz,$$

e quindi

$$\nabla P = \Big(\partial_x P, \partial_y P, \partial_z P\Big) = (a,b,c) = \Phi.$$

□