Funzioni armoniche e funzioni olomorfe in domini semplicemente connessi

Armonica coniugata

Teorema 1. *Sia Ω un aperto stellato (o, più in generale, semplicemente connesso) in $\mathbb{R}^2$. Sia*

$$u : \Omega \to \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^2 tale che

$$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u \equiv 0 \quad in \quad \Omega.$$

Allora, esiste un'unica (a meno di una costante additiva) funzione

$$v : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale per cui :

$$\Delta v = 0 \qquad e \qquad \begin{cases} \partial_x v = -\partial_y u \\ \partial_y v = \partial_x u \end{cases}.$$

Dimostrazione: Definiamo la 1-forma

$$\alpha = -\partial_y u(x, y)\, dx + \partial_x u(x, y)\, dy.$$

Per definizione, abbiamo

$$\begin{aligned} d\alpha &= d\Big(-\partial_y u(x, y)\, dx + \partial_x u(x, y)\, dy\Big) \\ &= -\partial_{yy} u(x, y)\, dy \wedge dx + \partial_{xx} u(x, y)\, dx \wedge dy \\ &= \Big(\partial_{xx} u(x, y) + \partial_{yy} u(x, y)\Big)\, dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Quindi α è chiusa. Siccome Ω è semicemente connesso, abbiamo che α è anche esatta. Quindi esiste una funzione

$$v : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale che

$$\begin{aligned} \partial_x v(x, y)\, dx + \partial_y v(x, y)\, dy &= dv \\ &= \alpha \\ &= -\partial_y u(x, y)\, dx + \partial_x u(x, y)\, dy. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{cases} \partial_x v(x, y) = -\partial_y u(x, y) \\ \partial_x v(x, y) = \partial_x u(x, y) \end{cases}.$$

Ora, per il teorema di Schwarz,

$$\partial_{xy} u = \partial_{yx} u.$$

Quindi

$$\Delta v = \partial_{xx} v + \partial_{yy} v = \partial_x(-\partial_y u) + \partial_y(\partial_x u) = 0,$$

il che dimostra l'esistenza di una funzione v (di classe C^2 su Ω) tale che

$$\Delta v = 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \partial_x v = -\partial_y u \\ \partial_y v = \partial_x u \end{cases}.$$

Ora, supponiamo che esiste un'altra funzione $w : \Omega \to \mathbb{R}$ con la stessa proprietà:

$$\Delta w = 0 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \partial_x w = -\partial_y u \\ \partial_y w = \partial_x u \end{cases}.$$

Ma allora

$$\nabla(w - v) \equiv 0 \qquad \text{su} \qquad \Omega.$$

Siccome Ω è connesso, abbiamo che

$$w - v \equiv C,$$

per una qualche costante $C \in \mathbb{R}$. $\square$

Funzioni olomorfe

D'ora in poi identificheremo
$$\mathbb{R}^2 = \Big\{(x,y)\ :\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\Big\},$$
con il piano complesso
$$\mathbb{C} = \Big\{z = x+iy\ :\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\Big\}.$$
Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^2$. Data una funzione
$$h:\Omega\to\mathbb{C}.$$
Possiamo scrivere
$$h = u+iv,$$
dove
$$u:\Omega\to\mathbb{R}\qquad\text{e}\qquad v:\Omega\to\mathbb{R}$$
sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di h. Diciamo che una funzione di classe C^1 su Ω
$$h:\Omega\to\mathbb{C}$$
è **olomorfa in** Ω, se
$$\partial_{\bar z}h\equiv 0\quad\text{su}\quad\Omega,$$
dove per definizione
$$\partial_{\bar z}h := \frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)\Big[u+iv\Big] = \frac{1}{2}\Big(\partial_x u-\partial_y v\Big)+i\frac{1}{2}\Big(\partial_y u+\partial_x v\Big).$$
Esempio 2. *La funzione*
$$h(z)=z$$
è olomorfa. Infatti,
$$\partial_{\bar z}z := \frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)\Big[x+iy\Big] = \frac{1}{2}\Big(\partial_x x-\partial_y y\Big)+i\frac{1}{2}\Big(\partial_y x+\partial_x y\Big)=0.$$
Proposizione 3. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che la funzione di classe C^2*
$$h:\Omega\to\mathbb{C}\ ,\qquad h=u+iv,$$
sia olomorfa su Ω. Allora, le funzioni
$$u:\Omega\to\mathbb{R}\qquad e\qquad v:\Omega\to\mathbb{R}$$
sono armoniche su Ω.

Dimostrazione. Per definizione abbiamo che
$$(\partial_x+i\partial_y)\Big[u+iv\Big] = \Big(\partial_x u-\partial_y v\Big)+i\Big(\partial_y u+\partial_x v\Big)=0.$$
Quindi applicando a $\partial_{\bar z}h$ l'operatore $\partial_x-i\partial_y$, otteniamo
$$\Big(\partial_x-i\partial_y\Big)\Big[\partial_{\bar z}h\Big]=0.$$
D'altra parte, siccome
$$\partial_x\partial_y(u+iv)=\partial_y\partial_x(u+iv),$$
otteniamo che
$$\Big(\partial_x-i\partial_y\Big)\Big(\partial_x+i\partial_y\Big)[u+iv] = \Big(\partial_{xx}+\partial_{yy}\Big)[u+iv]=\Delta u+i\Delta v.$$
Di conseguenza, $\Delta u=\Delta v=0$ su Ω. □

Come conseguenza di Teorema 1, otteniamo che su domini semplicemente connessi vale anche il viceversa.

Teorema 4. *Sia Ω un aperto stellato (o, più in generale, semplicemente connesso) in $\mathbb{R}^2$. Sia $u:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 armonica, ovvero tale che*
$$\Delta u = \partial_{xx}u+\partial_{yy}u\equiv 0\quad in\quad\Omega.$$
Allora, esiste una funzione olomorfa
$$h:\Omega\to\mathbb{C}$$
tale che
$$Re\big[h(x+iy)\big]=u(x,y)\qquad per\ ogni\qquad (x,y)\in\Omega.$$

Dimostrazione. Sia $v : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione data dal Teorema 1. Definiamo

$$h(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Applicando, l'operatore $\partial_{\bar{z}} = \partial_x + \partial_y$, otteniamo

$$\partial_{\bar{z}} h := \frac{1}{2}\big(\partial_x + i\partial_y\big)\Big[u + iv\Big] = \frac{1}{2}\Big(\partial_x u - \partial_y v\Big) + i\frac{1}{2}\Big(\partial_y u + \partial_x v\Big).$$

Ma per la definizione di v abbiamo che

$$\partial_x u - \partial_y v = 0 \qquad \text{e} \qquad \partial_y u + \partial_x v = 0,$$

e quindi $\partial_{\bar{z}} h = 0$. $\square$