Un altro esempio di una 1-forma chiusa, ma non esatta

Esercizio 1. *Consideriamo la* 1*-forma*

$$\alpha=\frac{-\sin y}{x^2+(\sin y)^2}\,dx+\frac{x\cos y}{x^2+(\sin y)^2}\,dy$$

definita su $\Omega:=\mathbb{R}^2\setminus\Big\{(n\pi,0)\ :\ n\in\mathbb{Z}\Big\}$*. Mostrare che la forma* α *è chiusa, ma non esatta.*

Soluzione. Per dimostrare che la forma è chiusa basta verificare che

$$\partial_y\left[\frac{-\sin y}{x^2+(\sin y)^2}\right]=\partial_x\left[\frac{x\cos y}{x^2+(\sin y)^2}\right].$$

Rimande da dimostrare che la forma α non sia esatta. Per ogni $r>0$ fissato consideriamo la curva chiusa

$$\gamma_r:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\ ,\qquad \gamma_r(\theta)=\big(r\cos\theta,\,r\sin\theta\big),$$

e calcoliamo l'integrale

$$\int_{\gamma_r}\alpha=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin\big(r\sin\theta\big)}{r^2\cos^2\theta+\sin^2\big(r\sin\theta\big)}\,,\,\frac{r\cos\theta\cos\big(r\sin\theta\big)}{r^2\cos^2\theta+\sin^2\big(r\sin\theta\big)}\right)\cdot\big(-r\sin\theta,r\cos\theta\big)\,d\theta.$$

Ora, osserviamo che

$$\sin y=y+O(y^3),$$

ovvero esistono $\delta>0$ e $C>0$ tali che

$$\big|\sin y-y\big|\le C|y|^3\qquad\text{per ogni}\qquad 0\le|y|<\delta.$$

Di conseguenza,

$$\big|\sin(r\sin\theta)-r\sin\theta\big|\le Cr^3\qquad\text{per ogni}\qquad 0<r<\delta\qquad\text{e per ogni}\qquad\theta\in[0,2\pi]\,.$$

Come al solito, scriveremo semplicemente

$$\sin(r\sin\theta)=r\sin\theta+O(r^3).$$

Di conseguenza, anche

$$\begin{aligned}\sin^2(r\sin\theta)&=\Big|r\sin\theta+\Big(\sin(r\sin\theta)-r\sin\theta\Big)\Big|^2\\&=r^2\sin^2\theta+2\Big(\sin(r\sin\theta)-r\sin\theta\Big)r\sin\theta+\big|\sin(r\sin\theta)-r\sin\theta\big|^2\\&=r^2\sin^2\theta+2rO(r^3)+O(r^6)=r^2\sin^2\theta+O(r^4).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\cos(r\sin\theta)=1+O(r^2).$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_r}\alpha&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin\big(r\sin\theta\big)}{r^2\cos^2\theta+\sin^2\big(r\sin\theta\big)}\,,\,\frac{r\cos\theta\,\cos\big(r\sin\theta\big)}{r^2\cos^2\theta+\sin^2\big(r\sin\theta\big)}\right)\cdot\big(-r\sin\theta,r\cos\theta\big)\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\big(r\sin\theta+O(r^3)\big)}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+O(r^4)}\,,\,\frac{r\cos\theta\,(1+O(r^2))}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+O(r^4)}\right)\cdot\big(-r\sin\theta,r\cos\theta\big)\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2+O(r^4)}\Big(\big(r\sin\theta+O(r^3)\big)r\sin\theta+r^2\cos^2\theta\,(1+O(r^2))\Big)\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{r^2+O(r^4)}{r^2+O(r^4)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+O(r^2)}{1+O(r^2)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\Big(1+O(r^2)\Big)\,d\theta=2\pi+O(r^2).\end{aligned}$$

In conclusione, per r abbastanza piccolo

$$\int_{\gamma_r}\alpha>0,$$

e quindi la forma α non può essere esatta. □