Università di Pisa - Ingegneria dell'Energia **a.a.** 2020-2021
717AA Analisi Matematica II e Calcolo Numerico

Prova scritta Analisi Matematica II - 21 luglio 2021

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (e altri dispositivi connessi), ne di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Matricola:

Corso: ☐ *Analisi 2 e Calcolo Numerico* oppure ☐ *Analisi 2 e Complementi di Analisi*

Esercizio 1. *Dare la definizione di insieme compatto per successioni in* $\mathbb{R}^d$.

Esercizio 2. *Dimostrare che se un insieme* $K \subset \mathbb{R}^2$ *è compatto per successioni, allora* K *è chiuso e limitato.*

Esercizio 3. *Data una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* F *è continua nel punto* $(0, 0)$, *se ...*

Esercizio 4. *Data una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Diciamo che* F *è differenziabile nel punto* $(0, 0)$, *se ...*

Esercizio 5. *Trovare una funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tale che:*

- F *è differenziabile in ogni punto* $(x, y) \neq (0, 0)$*;*
- F *è continua in* $(0, 0)$*;*
- F *è derivabile in* $(0, 0)$*;*
- F *non è differenziabile in zero.*

Spiegare perché la funzione trovata ha queste proprietà.

Esercizio 6. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2 y - y^2 x + 3x^2\,.$$

La funzione F ha esattamente due punti critici in $\mathbb{R}^2$: $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$.

(a) *Trovare le coordinate dei punti critici A_1 e A_2.*

(b) *Calcolare la matrice Hessiana $H = \nabla^2 F$ di F in A_1 e A_2.*

(c) *Per ciascuna delle matrici $\nabla^2 F(A_1)$ e $\nabla^2 F(A_2)$ dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure ne semi-definita positiva ne semi-definita negativa.*

(d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punti A_1 e A_2, usando il risultato del punto precedente?*

Esercizio 7. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = \sin(x+2y) + \ln(1+3y-xy)$$

e la curva

$$\gamma(t) = \left(e^{3t+t^2} - e^{-t}\,,\, t - t^3\right).$$

Calcolare la derivata $(F\circ\gamma)'(t)$ della funzione composta $t \mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t=0$.

Esercizio 8. *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{2x^2+1} \le y \le x+1\Big\}.$$

e la funzione

$$F(x,y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy.$$

Esercizio 9. *Siano*

$$a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad e \qquad b:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

due funzioni C^∞. Consideriamo la 1-forma.

$$\alpha = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy\,.$$

1. *Calcolare $d\alpha$ in funzione di a e b.*

2. *Diciamo che la forma α è chiusa, se:*

---

3. *Diciamo, invece, che la 1-forma α è esatta, se esiste una funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che:*

---

4. *Scrivere le definizioni di forma chiusa e forma esatta in termini dei coefficienti a e b.*

Esercizio 10. *Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la forma differenziale*

$$\alpha = \frac{2x - ay}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x + 2y}{x^2 + y^2}\, dy$$

è chiusa? Per i valori trovati calcolare $\int_\gamma \alpha$, dove γ è la curva

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \gamma(t) = \big(t, 1 - t^2\big).$$

Esercizio 11. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left((x + y)e^{x^2+y^2} \ , \ \frac{2y}{e^{x^2+y^2}} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y)\, dx\, dy.$$

Esercizio 12. *Siano*

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad e \qquad b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,$$

tre funzioni C^∞. Consideriamo la 1-forma.

$$\alpha = a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy\,.$$

Sia $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa di classe C^1.
Dimostrare che se la forma α è chiusa, allora $\displaystyle\int_\gamma \alpha = 0$.

Esercizio 13. *Per quali $R > 0$ vale l'uguaglianza*

$$\iint_{B_R} (x^4 + y^4)\, dx\, dy = \iiint_{B_R} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$
