

Teorema della divergenza

DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

Siano Ω un aperto di \mathbb{R}^2 e sia F il campo vettoriale

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, y) = (F(x, y), G(x, y)).$$

La divergenza di Φ è definita come:

$$\operatorname{div} \Phi(x, y) = \partial_x F(x, y) + \partial_y G(x, y).$$

Più in generale, se Ω è un aperto di \mathbb{R}^n ed Φ è un campo vettoriale

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Phi(X) = (\Phi_1(X), \Phi_2(X), \dots, \Phi_n(X)),$$

allora

$$\operatorname{div} \Phi(X) = \partial_{x_1} \Phi_1(X) + \partial_{x_2} \Phi_2(X) + \dots + \partial_{x_n} \Phi_n(X).$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA IN DOMINI NORMALI

Teorema 1 (Teorema della divergenza in domini normali). *Siano*

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni di classe $C^1([a, b])$ e tali che

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni } x \in (a, b),$$

e sia

$$D = \left\{ (x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x) \right\}$$

il dominio normale semplice determinato da u e v . Sia Φ un campo vettoriale

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, y) = (F(x, y), G(x, y)),$$

di classe C^1 . Allora

$$\iint_D \operatorname{div} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial D} \Phi \cdot \nu_D,$$

dove ν_D è il versore (quindi un vettore di norma 1) normale al bordo uscente da D .

Dimostrazione. Osserviamo che il bordo di D è dato da

$$\begin{aligned} \partial D &= \left\{ (x, v(x)) : x \in [a, b] \right\} && \text{(il grafico di } g) \\ &\cup \left\{ (x, u(x)) : x \in [a, b] \right\} && \text{(il grafico di } f) \\ &\cup \left\{ (a, y) : y \in [f(a), g(a)] \right\} && \text{(il lato verticale sinistro)} \\ &\cup \left\{ (b, y) : y \in [f(b), g(b)] \right\} && \text{(il lato verticale destro)} \end{aligned}$$

Allora abbiamo:

$$\nu_D(x, y) = \begin{cases} \frac{(-v'(x), 1)}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}} & \text{sul grafico di } g \\ -\frac{(-u'(x), 1)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} & \text{sul grafico di } f \\ (-1, 0) & \text{sul lato verticale sinistro} \\ (1, 0) & \text{sul lato verticale destro.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \operatorname{div} \Phi(x, y) \, dx \, dy &= \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} (\partial_x F(x, y) + \partial_y G(x, y)) \, dy \, dx \\
&= \int_a^b (G(x, v(x)) - G(x, u(x))) \, dx \\
&\quad + \int_a^b u'(x) F(x, u(x)) \, dx - \int_a^b v'(x) F(x, v(x)) \, dx \\
&\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b, y) \, dy \\
&\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} F(a, y) \, dy \\
&= \int_a^b (-v'(x) F(x, v(x)) + G(x, v(x))) \, dx \\
&\quad - \int_a^b (-u'(x) F(x, u(x)) + G(x, u(x))) \, dx \\
&\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b, y) \, dy \\
&\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} F(a, y) \, dy = \int_{\gamma} \Phi \cdot \nu_D,
\end{aligned}$$

dove γ è la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo di ∂D in senso antiorario. \square

TEOREMA DELLA DIVERGENZA IN DOMINI REGOLARI

Definizione 2. Diciamo che $D \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio C^1 , se D è un compatto e se per ogni punto

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial D,$$

esistono

- un rettangolo aperto

$$\mathcal{R}_X = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2) \times \dots \times (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n);$$

- un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ (supponiamo che $i = n$) ed una funzione

$$\eta : (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1) \times (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2) \times \dots \times (x_{n-1} - \delta_{n-1}, x_{n-1} + \delta_{n-1}) \rightarrow (x_n - \delta_n, x_n + \delta_n)$$

di classe C^1 tale che vale uno dei casi seguenti :

Caso 1. $D \cap \mathcal{R}_X = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_X : y_n \leq \eta(y_1, \dots, y_{n-1})\};$

Caso 2. $D \cap \mathcal{R}_X = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_X : y_n \geq \eta(y_1, \dots, y_{n-1})\}.$

In entrambi i casi, il bordo di D in \mathcal{R}_X è dato da

$$\partial D \cap \mathcal{R}_X = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{R}_X : y_n = \eta(y_1, \dots, y_{n-1})\}.$$

Definizione 3. Sia D un dominio in \mathbb{R}^n . Un intorno di D è un aperto che contiene D .

Teorema 4 (Teorema della divergenza in domini regolari). Sia D un dominio in \mathbb{R}^2 con bordo ∂D di classe C^1 . Sia Ω un intorno di D e sia Φ un campo vettoriale

$$\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, y) = (F(x, y), G(x, y)),$$

di classe C^1 . Allora

$$\int_D \operatorname{div} \Phi(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial D} \Phi \cdot \nu_D,$$

dove $\nu_D : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2$ è il versore normale uscente su ∂D .

 ESERCIZI

Esercizio 5. Sia D il dominio

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x^2, y^2).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 6. Sia D il dominio

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x, y^2).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 7. Sia D il dominio

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x^3, y).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 8. Sia D il dominio

$$D = \overline{B}_2 \setminus B_1,$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x^3, y).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 9. Sia D il dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x^2, y^2).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 10. Sia D il dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \right\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (xy, x^2 + xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 11. Sia D il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x^2 + y^4, xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 12. Sia D il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

e sia F il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x + y, xy).$$

Calcolare

$$\iint_D \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 13 (Appello giugno 2021). Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x + 2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{y + 2x}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 14 (Appello giugno 2021). Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left((x + y)e^{x^2+y^2}, (x - y)e^{-x^2-y^2} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 15 (Appello luglio 2021). Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left((x + y)e^{x^2+y^2}, \frac{2y}{e^{x^2+y^2}} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 16 (Appello settembre 2021). Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left((x^2 - 2y)e^{x^2+y^2}, \frac{xy + y}{e^{x^2+y^2}} \right)$$

Calcolare l'integrale

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 17 (Luglio 2020). Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 . Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^3}, \frac{2y}{\sqrt{3 + x^2 + y^2}} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 18 (Giugno 2020). Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 .
Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(x^3(x^2 + y^2)^2, x^2y(x^2 + y^2)^3 \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 19. Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 .
Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^2y}{(x^2 + y^2)^3} \right)$$

Calcolare

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{B_1 \setminus B_r} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 20 (Febbraio 2021). Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 .
Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{xy}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 21 (Febbraio 2021). Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 .
Sia $F : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(x^3 + xy^2, \frac{2y}{\cos(x^2 + y^2 - 1)} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 22 (Aprile 2021). Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 .
Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x - y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x + y}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 23 (Aprile 2021). Sia B_1 la palla di centro zero e raggio 1 in \mathbb{R}^2 .
Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(yx^2 + y^3, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 24. Sia D l'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2 \right\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(xy(x^2 + y)^6, x + y \right)$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 25. Sia D l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = (y^6(x^2 - y), x).$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 26. Sia D l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = ((x^2 - y)^3(x - y)^7, xy).$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 27. Sia D l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = (xy, y(y - x)x^6).$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$

Esercizio 28. Sia B_1 la palla di centro $(0, 0)$ e raggio 1 in \mathbb{R}^2 . Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = (x(x^2 + y^2)^7, y(x^2 + y^2)^5).$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy.$$