Integrazione su grafici. Esercizi ed esempi

Area di un paraboloide

Esempio 1. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = x^2 + y^2.$$

Soluzione. Definiamo $\Phi(x, y) = (x, y, F(x, y))$. Allora,

$$\partial_x \Phi(x, y) = \big(1, 0, \partial_x F(x, y)\big) \qquad \text{e} \qquad \partial_y \Phi(x, y) = \big(0, 1, \partial_y F(x, y)\big),$$

e quindi

$$\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi = \big(- \partial_x F, -\partial_y F, 1\big).$$

Di conseguenza,

$$|\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi| = \sqrt{1 + \big|\partial_x F\big|^2 + \big|\partial_y F\big|^2}.$$

Siccome nel nostro caso

$$\partial_x F(x, y) = 2x \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x, y)\, dy = 2y,$$

otteniamo che

$$\text{Area}\,(\Gamma) = \iint_{B_R} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy.$$

In coordinate polari, abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(\Gamma) &= \iint_{B_R} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2}\, d\theta\, r\, dr \\
&= 2\pi \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2}\;\, r\, dr \\
&= 2\pi \int_0^{4R^2} \sqrt{1 + s}\, \frac{1}{8}\, ds \qquad \text{(ponendo } s = 4r^2,\ ds = 8r\, dr) \\
&= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2}{3}\big(1 + s\big)^{3/2}\right]_0^{4R^2} = \frac{\pi}{6}\Big(\big(1 + 4R^2\big)^{3/2} - 1\Big).
\end{aligned}$$

□

Area di un cono

Esempio 2. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soluzione. Definiamo $\Phi(x, y) = (x, y, F(x, y))$. Allora,

$$\partial_x \Phi(x, y) = \big(1, 0, \partial_x F(x, y)\big) \qquad \text{e} \qquad \partial_y \Phi(x, y) = \big(0, 1, \partial_y F(x, y)\big),$$

e quindi

$$\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi = \big(- \partial_x F, -\partial_y F, 1\big) \qquad \text{e} \qquad |\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi| = \sqrt{1 + \big|\partial_x F\big|^2 + \big|\partial_y F\big|^2}.$$

Siccome nel nostro caso

$$\partial_x F(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x, y)\, dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

otteniamo che

$$\text{Area}\,(\Gamma) = \iint_{B_R} \sqrt{2}\, dx\, dy = 2\pi R^2.$$

□

Area di una semisfera

Esempio 3. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Soluzione. Definiamo $\Phi(x,y) = (x, y, F(x,y))$. Allora,

$$\partial_x \Phi(x,y) = \big(1, 0, \partial_x F(x,y)\big) \qquad \text{e} \qquad \partial_y \Phi(x,y) = \big(0, 1, \partial_y F(x,y)\big),$$

e quindi

$$\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi = \big(- \partial_x F, -\partial_y F, 1\big).$$

Di conseguenza,

$$|\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi| = \sqrt{1 + \big|\partial_x F\big|^2 + \big|\partial_y F\big|^2}.$$

Siccome nel nostro caso

$$\partial_x F(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad \text{e} \qquad \partial_y F(x,y)\, dy = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \ ,$$

otteniamo che

$$\text{Area}\,(\Gamma) = \iint_{B_R} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\ dx\, dy = \iint_{B_R} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\ dx\, dy.$$

In coordinate polari, abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Area}\,(\Gamma) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}}\ d\theta\, r\, dr \\
&= 2\pi \int_0^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}}\ r\, dr \\
&= 2\pi R \int_0^{R^2} \frac{1}{\sqrt{s}}\, \frac{1}{2}\, ds \qquad (\text{ponendo } s = R^2 - r^2,\ ds = 2r\, dr) \\
&= 2\pi R \Big[\sqrt{s}\Big]_0^{R^2} = 2\pi R^2.
\end{aligned}$$

□

Esercizi

Esercizio 4 (Area di un semicilindro)**.** *Sia $\mathcal{R} = [-1, 1] \times [0, L]$ un rettangolo in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Esempio 5. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = x^2 - y^2.$$

Esempio 6. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = xy.$$

Esempio 7. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Calcolare l'area del grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = 2x.$$

Esempio 8. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Dato il grafico Γ della funzione*

$$F : B_R \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

calcolare $\displaystyle\int_\Gamma G$*, dove $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la funzione*

$$G(x,y,z) = z.$$