Integrazione su insiemi misurabili

Integrabilità di una funzione su un insieme limitato

Definizione 1. *Sia Ω un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che F è integrabile su Ω, se esiste un rettangolo*

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

contenente Ω tale che la funzione

$$G : \mathcal{R} \to \mathbb{R}, \qquad G(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} F(x_1, \dots, x_n) & se \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \\ 0 \quad se \quad (x_1, \dots, x_n) \notin \Omega. \end{cases}$$

sia integrabile su $\mathcal{R}$. In tal caso definiamo

$$\int_\Omega F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathcal{R}} G(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

Osserviamo che:

- L'integrabilità di F ed il valore del suo integrale non dipendono dalla scelta del rettangolo $\mathcal{R}$.
- In dimensione due si scrive spesso $\displaystyle\iint_\Omega$ al posto di $\displaystyle\int_\Omega$
- In dimensione tre si scrive spesso $\displaystyle\iiint_\Omega$ al posto di $\displaystyle\int_\Omega$
- Si scrive anche
$$\int_\Omega F(X)\, dX$$
al posto di
$$\int_\Omega F(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \;;$$
in questo caso è sottinteso che $X = (x_1, \dots, x_n)$ è la variabile in $\mathbb{R}^n$.

Funzioni continue su insiemi misurabili

Teorema 2. *Sia D un insieme limitato e misurabile in $\mathbb{R}^d$; indicheremo con $\overline{D}$ la chiusura di D. Allora, ogni funzione $F : \overline{D} \to \mathbb{R}$, continua su $\overline{D}$, è integrabile su D.*

Proof. Sia $\mathcal{R}$ un rettangolo limitato contenente $\overline{D}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$.

Siccome D è misurabile esiste una partizione $\mathcal{P}$ di $\mathcal{R}$ tale che

$$\Big(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \sup_{R_{ij}} \chi_D \Big) - \Big(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \inf_{R_{ij}} \chi_D \Big) \le \varepsilon.$$

Possiamo dividere i rettangoli di $\mathcal{P}$ in due gruppi $\mathcal{P}'$ e $\mathcal{P}''$. Preso un rettangolo $R_{ij} \in \mathcal{P}$, consideriamo due casi.

- Diciamo che $R_{ij} \in \mathcal{P}'$, se $\sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D = 0$. In questo caso, abbiamo che:
$$R_{ij} \subset D \qquad \text{oppure} \qquad R_{ij} \cap D = \emptyset.$$
- Diciamo che $R_{ij} \in \mathcal{P}''$, se $\sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D = 1$. Allora, per costruzione, abbiamo che
$$\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}''} |R_{ij}| = \Big(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \sup_{R_{ij}} \chi_D \Big) - \Big(\sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} |R_{ij}| \inf_{R_{ij}} \chi_D \Big) \le \varepsilon.$$

Ora, siccome $\overline{D}$ è compatto ed F è una funzione continua su D, applicando il teorema di Cantor, otteniamo che esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\text{Se} \quad X, Y \in D \quad \text{e} \quad |X - Y| \leq \delta\,, \quad \text{allora} \quad |F(X) - F(Y)| < \varepsilon.$$

Sia ora $\mathcal{Q}$ una qualsiasi partizione più fine di $\mathcal{P}$ in rettangoli di diametro che non supera δ. Definiamo ora le famiglie $\mathcal{Q}'$ e $\mathcal{Q}''$ come segue. Sia $R_{ij} \in \mathcal{Q}$.

- diciamo che $R_{ij} \in \mathcal{Q}'$, se R_{ij} è contenuto in un rettangolo della famiglia $\mathcal{P}'$. In particolare, si ha
$$\sup_{R_{ij}} \chi_D - \inf_{R_{ij}} \chi_D = 0,$$
e si hanno quindi due casi
$$R_{ij} \subset D \qquad \text{oppure} \qquad R_{ij} \cap D = \emptyset.$$
In particolare,
$$|F(X) - F(Y)| \leq \varepsilon \qquad \text{per ogni} \qquad X, Y \in R_{ij}\,;$$
- diciamo che $R_{ij} \in \mathcal{Q}''$, se R_{ij} è contenuto in un rettangolo della famiglia $\mathcal{P}''$. In particolare, sommando su tutti i rettangoli
$$\sum_{R_{ij} \in \mathcal{Q}''} |R_{ij}| = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}''} |R_{ij}| \leq \varepsilon.$$

Possiamo quindi applicare il terzo dei criteri di integrabilità. □

Funzioni continue su domini normali

Corollario 3. *Siano*
$$u : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad e \qquad v : [a, b] \to \mathbb{R}\,,$$
due funzioni continue su $[a, b]$ *e tali che*
$$u(x) \leq v(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in [a, b].$$
Sia D *il dominio normale determinato dalle funzioni* u *e* v.
$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq b,\; u(x) \leq y \leq v(x)\Big\}.$$
Allora, ogni funzione $F : D \to \mathbb{R}$*, continua su* D*, è anche integrabile su* D.

Corollario 4. *Sia*
$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$$
un rettangolo in $\mathbb{R}^{n-1}$ *e siano*
$$u : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \quad e \quad v : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$$
due funzioni continue tali che
$$u(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq v(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \textit{per ogni} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{R}.$$
Sia D *il dominio normale determinato dalle funzioni* u *e* v,
$$D := \Big\{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{R},\; u(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq v(x_1, \dots, x_{n-1})\Big\}.$$
Allora, ogni funzione $F : D \to \mathbb{R}$*, continua su* D*, è anche integrabile su* D.