

## Formula di Fubini

**Teorema 1** (Formula di Fubini). Sia  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  un rettangolo in  $\mathbb{R}^2$ .

Sia  $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e tale che:

- (a)  $F$  è integrabile su  $\mathcal{R}$ ;
- (b) per ogni fissato  $x \in [a, b]$ , la funzione

$$y \mapsto F(x, y)$$

è integrabile sull'intervallo  $[c, d]$ ;

- (c) La funzione

$$I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad I(x) = \int_c^d F(x, y) dy$$

è integrabile su  $[a, b]$ .

Allora

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d F(x, y) dy \right) dx.$$

**Dimostrazione.** Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $\varepsilon > 0$  e siccome  $F$  è integrabile su  $\Omega$ , possiamo trovare

una partizione  $\mathcal{Q}$ , generata da una partizione  $\mathcal{Q}_{[a,b]}$  di  $[a, b]$  e una partizione  $\mathcal{Q}_{[c,d]}$  di  $[c, d]$ ,

tale che

$$\left( \sum_{R \in \mathcal{Q}} \sup_R F \right) - \left( \sum_{R \in \mathcal{Q}} \inf_R F \right) \leq \varepsilon.$$

Siccome  $I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile, possiamo trovare una partizione dell'intervallo  $[a, b]$ ,

$$\mathcal{P}_{[a,b]} := \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_M = b\},$$

tale che

$$\mathcal{P}_{[a,b]} \text{ sia pi\`u fine di } \mathcal{Q}_{[a,b]}$$

e tale che

$$\left( \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) \sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) - \left( \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) \inf_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) \leq \varepsilon.$$

Ora, siccome abbiamo

$$\sum_{j=0}^{M-1} \left( (t_{j+1} - t_j) \inf_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) \leq \int_a^b I(x) dx \leq \sum_{j=0}^{M-1} \left( (t_{j+1} - t_j) \sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right),$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} \left( (t_{j+1} - t_j) \inf_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right) \leq \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) I(t_j) \leq \sum_{j=0}^{M-1} \left( (t_{j+1} - t_j) \sup_{x \in [t_j, t_{j+1}]} I(x) \right),$$

possiamo dedurre che

$$\left| \int_a^b I(x) dx - \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) I(t_j) \right| \leq \varepsilon.$$

Sia ora

$$j \in \{0, \dots, M-1\}.$$

Siccome la funzione

$$y \mapsto F(t_j, y).$$

è integrabile su  $[c, d]$  e siccome

$$I(t_j) = \int_c^d F(t_j, y) dy,$$

possiamo trovare una partizione

$$\mathcal{P}_{[c,d]} := \{c = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_N = d\},$$

tale che

$$\mathcal{P}_{[c,d]} \text{ sia pi\u00f9 fine di } \mathcal{Q}_{[c,d]}$$

e tale che **la disuguaglianza**

$$\left( \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) \sup_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y) \right) - \left( \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) \inf_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y) \right) \leq \varepsilon,$$

**vale per ogni**  $j = 0, \dots, M-1$ .

Ora, ragionando come sopra, abbiamo che per ogni  $j = 0, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \left( (s_{i+1} - s_i) \inf_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y) \right) &\leq I(t_j) = \int_c^d F(t_j, y) dy \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left( (s_{i+1} - s_i) \sup_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y) \right), \\ \sum_{i=0}^{N-1} \left( (s_{i+1} - s_i) \inf_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y) \right) &\leq \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left( (s_{i+1} - s_i) \sup_{y \in [s_i, s_{i+1}]} F(t_j, y) \right). \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\left| I(t_j) - \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \right| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } j = 0, \dots, M-1,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b I(x) dx - \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \right| &\leq \left| \int_a^b I(x) dx - \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) I(t_j) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) \left( I(t_j) - \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \right) \right| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) \varepsilon = \varepsilon(1 + d - c), \end{aligned}$$

In conclusione,

$$(1) \quad \left| \int_a^b I(x) dx - \sum_{j=0}^{M-1} (t_{j+1} - t_j) \sum_{i=0}^{N-1} (s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \right| \leq \varepsilon(1 + d - c).$$

Consideriamo ora

la partizione  $\mathcal{P}$ , generata dalle partizioni  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e  $\mathcal{P}_{[c,d]}$  definite sopra.

Siccome, per costruzione,

$$\mathcal{P}_{[a,b]} \text{ \u00e9 pi\u00f9 fine di } \mathcal{Q}_{[a,b]} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_{[c,d]} \text{ \u00e9 pi\u00f9 fine di } \mathcal{Q}_{[c,d]},$$

abbiamo anche che

$$\mathcal{P} \text{ \u00e9 pi\u00f9 fine di } \mathcal{Q}.$$

Di conseguenza,

$$\left( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \sup_{R_{ij}} F \right) - \left( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \inf_{R_{ij}} F \right) \leq \varepsilon.$$

ora, siccome

$$\left( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \inf_{R_{ij}} F \right) \leq \iint_R F(x, y) dx dy \leq \left( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \sup_{R_{ij}} F \right),$$

$$\left( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \inf_{R_{ij}} F \right) \leq \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (t_{j+1} - t_j)(s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \leq \left( \sum_{R_{ij} \in \mathcal{P}} \sup_{R_{ij}} F \right),$$

abbiamo che

$$(2) \quad \left| \iint_R F(x, y) dx dy - \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{N-1} (t_{j+1} - t_j)(s_{i+1} - s_i) F(t_j, s_i) \right| \leq \varepsilon.$$

Ora, mettendo insieme (1) e (2), otteniamo

$$\left| \iint_R F(x, y) dx dy - \int_a^b I(x) dx \right| \leq (2 + d - c)\varepsilon.$$

Siccome  $\varepsilon$  è arbitrario, abbiamo la tesi. □

**Corollario 2.** Siano  $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$  un rettangolo in  $\mathbb{R}^2$  ed  $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora

$$\iint_{\mathcal{R}} F(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b F(x, y) dx \right) dy.$$

**Corollario 3.** Siano

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad e \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni continue su  $[a, b]$  tali che

$$u(x) \leq v(x) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Sia  $D$  il dominio normale determinato da  $u$  e  $v$ ,

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x) \right\}.$$

Sia  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su  $D$ . Allora

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{u(x)}^{v(x)} F(x, y) dy \right) dx.$$