Integrazione di 1-forme sul bordo di un dominio normale

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v:[a,b]\to\mathbb{R},$$

due funzioni di classe C^1 su $[a,b]$ tali che:

$$u(x) < v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x\in(a,b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \Big\{(x,y)\ :\ x\in[a,b],\ u(x)\le y\le v(x)\Big\}.$$

Sia γ la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo ∂D in senso antiorario.

Date due funzione continue

$$F:D\to\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad G:D\to\mathbb{R}\,,$$

consideriamo la 1-forma

$$\alpha = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy.$$

Allora,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \alpha = \int_a^b &\Big(F\big(x,u(x)\big) + u'(x)G\big(x,u(x)\big)\Big)\,dx\\ &+\int_{u(b)}^{v(b)} G\big(b,y\big)\,dy\\ &\quad -\int_a^b \Big(F\big(x,v(x)\big)+v'(x)G\big(x,v(x)\big)\Big)\,dx\\ &\quad\quad -\int_{u(a)}^{v(a)} G\big(a,y\big)\,dy.\end{aligned}$$

In particolare,

$$\int_\gamma F(x,y)\,dy = \int_a^b F\big(x,u(x)\big)\,dx - \int_a^b F\big(x,v(x)\big).$$

e

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(x,y)\,dx = \int_a^b &u'(x)G\big(x,u(x)\big)\,dx\\ &+\int_{u(b)}^{v(b)} G\big(b,y\big)\,dy\\ &\quad -\int_a^b v'(x)G\big(x,v(x)\big)\,dx\\ &\quad\quad -\int_{u(a)}^{v(a)} G\big(a,y\big)\,dy.\end{aligned}$$