Formule di Gauss-Green sul disco

Partizione del disco in domini normali

Sia $R > 0$ un raggio dato. Fissiamo un angolo
$$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$
e consideriamo gli insiemi
$$D_1 := \Big\{(x, y) \in B_R \ : \ x \le -R\cos\theta\Big\};$$
$$D_2 := \Big\{(x, y) \in B_R \ : \ -R\cos\theta \le x \le R\cos\theta\Big\};$$
$$D_3 := \Big\{(x, y) \in B_R \ : \ x \ge R\cos\theta\Big\}.$$
Infatti, D_2 è un dominio normale nella direzione y
$$D_2 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -R\cos\theta \le x \le R\cos\theta\ , \quad u_2(x) \le y \le v_2(x)\Big\},$$
dove
$$v_2(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad u_2(x) := -\sqrt{R^2 - x^2}\ ;$$
mentre D_1 e D_3 sono domini normali nella direzione x,
$$D_1 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -R\sin\theta \le y \le R\sin\theta\ , \quad u_1(y) \le x \le v_1(y)\Big\},$$
dove
$$v_1(y) := -R\sin\theta \qquad \text{e} \qquad u_1(y) := -\sqrt{R^2 - y^2}\ ;$$
$$D_1 := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -R\sin\theta \le y \le R\sin\theta\ , \quad u_1(y) \le x \le v_1(y)\Big\},$$
dove
$$v_3(y) := \sqrt{R^2 - y^2} \qquad \text{e} \qquad u_3(y) := R\sin\theta\ .$$
La frontiera di ∂D_2 è parametrizzata (in senso antioraio) dalle curve:
$$\alpha : \big[-R\cos\theta, R\cos\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \alpha(t) = \Big(t\ ,\ u_2(t)\Big);$$
$$\gamma : \big[-R\cos\theta, R\cos\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \gamma(t) = \Big(-t\ ,\ v_2(-t)\Big);$$
$$\mu_2 : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \mu_2(t) = \Big(R\cos\theta\ ,\ t\Big);$$
$$\eta_2 : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \eta_2(t) = \Big(-R\cos\theta\ ,\ -t\Big).$$
La frontiera di ∂D_3 è parametrizzata (in senso antioraio) dalle curve:
$$\beta : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \beta(t) = \Big(v_3(-t)\ ,\ t\Big);$$
$$\mu_3 : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \mu_3(t) = \Big(R\cos\theta\ ,\ -t\Big).$$
La frontiera di ∂D_1 è parametrizzata (in senso antioraio) dalle curve:
$$\eta_1 : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \eta_1(t) = \Big(R\cos\theta\ ,\ t\Big);$$
$$\delta : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta\big] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \delta(t) = \Big(u_1(-t)\ ,\ -t\Big).$$

Osservazione 1. *Osserviamo che:*
- *le curve η_2 e η_1 sono opposte;*
- *le curve μ_2 e μ_3 sono opposte.*

Lemma 2. *Le seguenti coppie di curve sono equivalenti:*

(a) *Le curve*

$$\alpha : \big[-R\cos\theta, R\cos\theta \big] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \alpha(t) = \Big(t \,,\, u_2(t)\Big)$$

e

$$\widetilde{\alpha} : \big[-\pi + \theta, -\theta \big] \ , \qquad \widetilde{\alpha}(t) = \Big(R\cos t \,,\, R\sin t\Big),$$

sono equivalenti.

(b) *Le curve*

$$\beta : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta \big] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \beta(t) = \Big(\sqrt{R^2 - y^2} \,,\, t\Big)$$

e

$$\widetilde{\beta} : \big[-\theta, \theta \big] \ , \qquad \widetilde{\beta}(t) = \Big(R\cos t \,,\, R\sin t\Big),$$

sono equivalenti.

(c) *Le curve*

$$\gamma : \big[-R\cos\theta, R\cos\theta \big] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma(t) = \Big(-t \,,\, v_2(-t)\Big)$$

e

$$\widetilde{\gamma} : \big[\theta, \pi - \theta\big] \ , \qquad \widetilde{\beta}(t) = \Big(R\cos t \,,\, R\sin t\Big),$$

sono equivalenti.

(d) *Le curve*

$$\delta : \big[-R\sin\theta, R\sin\theta \big] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \delta(t) = \Big(u_1(-t) \,,\, -t\Big).$$

e

$$\widetilde{\delta} : \big[\pi - \theta, \pi + \theta\big] \ , \qquad \widetilde{\beta}(t) = \Big(R\cos t \,,\, R\sin t\Big).$$

sono equivalenti.

Dimostrazione. Dimostriamo (b). Infatti, se consideriamo la mappa

$$g : [-\theta, \theta] \to [-R\sin\theta, R\sin\theta] \ , \qquad g(t) = R\sin t,$$

si ha che

$$\widetilde{\beta}(t) := \beta\big(g(t)\big) \qquad \text{per ogni} \qquad t \in [-\theta, \theta].$$

□

Lemma 3. *Per una qualsiasi forma differenziale*

$$\varphi = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy$$

di classe C^0, abbiamo che:

$$\int_{(\partial D_1)_+} \varphi + \int_{(\partial D_2)_+} \varphi + \int_{(\partial D_3)_+} \varphi = \int_\sigma \varphi,$$

dove σ è la curva

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \qquad \sigma(t) = \Big(R\cos t \,,\, R\sin t\Big).$$

Dimostrazione. Per definizione si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial D_1)_+} \varphi \ &= \int_\delta \varphi + \int_{\eta_1} \varphi \\
\int_{(\partial D_2)_+} \varphi \ &= \int_\alpha \varphi + \int_{\mu_2} \varphi + \int_\gamma \varphi + \int_{\eta_2} \varphi \\
\int_{(\partial D_3)_+} \varphi \ &= \int_\beta \varphi + \int_{\eta_3} \varphi \,.
\end{aligned}$$

Quindi, sommando si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{(\partial D_1)_+} \varphi + \int_{(\partial D_2)_+} \varphi + \int_{(\partial D_3)_+} \varphi &= \int_\alpha \varphi + \int_\beta \varphi + \int_\gamma \varphi + \int_\delta \varphi \\
&= \int_{\widetilde{\alpha}} \varphi + \int_{\widetilde{\beta}} \varphi + \int_{\widetilde{\gamma}} \varphi + \int_{\widetilde{\delta}} \varphi = \int_{\widetilde{\sigma}} \varphi \ ,
\end{aligned}$$

dove

$$\widetilde{\sigma} : [-\pi + \theta, \pi + \theta] \to \mathbb{R}^2$$

è il concatenamento delle curve $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}$. Infine, basta osservare che

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\sigma}} \varphi &= \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} \Big(F(R\cos t, R\sin t)\,,\, G(R\cos t, R\sin t)\Big) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(F(R\cos t, R\sin t)\,,\, G(R\cos t, R\sin t)\Big) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt = \int_\sigma \varphi\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema di Gauss-Green sul disco

Teorema 4. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Sia Ω un aperto che contiene $\overline{B}_R$ e siano*

$$F : \Omega \to \mathbb{R} \qquad e \qquad G : \Omega \to \mathbb{R}\,,$$

due funzioni di classe C^1 su Ω. Allora, valgono le formule di Gauss-Green

$$\iint_{B_R} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy = \int_\sigma G(x, y)\, dy\,,$$

$$\iint_{B_R} \partial_y F(x, y)\, dx\, dy = -\int_\sigma F(x, y)\, dx\,,$$

dove σ è la seguente curva semplice e chiusa che parametrizza il bordo ∂B_R in senso antiorario:

$$\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\ , \qquad \sigma(t) = \Big(R\cos t\,,\, R\sin t\Big).$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\iint_{B_R} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_3} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy.$$

Applicando le formule di Gauss-Green sui domini normali D_1, D_2 e D_3, otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_{B_R} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy &= \iint_{D_1} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_3} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{(\partial D_1)_+} G(x, y)\, dy + \int_{(\partial D_2)_+} G(x, y)\, dy + \int_{(\partial D_3)_+} G(x, y)\, dy\,.\end{aligned}$$

Infine, usando Lemma 3, otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_{B_R} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy &= \int_{(\partial D_1)_+} G(x, y)\, dy + \int_{(\partial D_2)_+} G(x, y)\, dy + \int_{(\partial D_3)_+} G(x, y)\, dy \\ &= \int_\sigma G(x, y)\, dy\,. \qquad \square\end{aligned}$$

L'area del disco

Teorema 5. *Sia B_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$. Allora, l'area del disco è*

$$|B_R| = \iint_{B_R} 1\, dx\, dy = \pi R^2.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$G(x, y) = x.$$

Allora

$$\iint_{B_R} 1\, dx\, dy = \iint_{B_R} \partial_x G(x, y)\, dx\, dy.$$

Per la formula di Gauss-Green su B_R, abbiamo che

$$\begin{aligned}\iint_{B_R} \partial_x G(x,y)\,dx\,dy &= \int_{(\partial B_R)_+} G(x,y)\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(0, G(R\cos t, R\sin t)\Big)\cdot(-R\sin t, R\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} G(R\cos t, R\sin t)\,R\cos t\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t\,dt \\ &= R^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \pi R^2.\end{aligned}$$

□

Area di un settore di disco

Teorema 6. *Dati un raggio $R > 0$ e due angoli*

$$0 \le \alpha < \beta \le 2\pi,$$

definiamo il settore

$$S_R(\alpha,\beta) := \Big\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 \;:\; r\in(0,R],\; \theta\in[\alpha,\beta]\Big\}.$$

Allora, l'area del settore $S_R(\alpha,\beta)$ è data da

$$|S_R(\alpha,\beta)| = \iint_{S_R(\alpha,\beta)} 1\,dx\,dy = R^2\,\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Dimostrazione. Per semplicità scriveremo

$$S := S_R(\alpha,\beta).$$

Osserviamo che come B_R, anche il settore S pùo essere scritto come unione di domini normali. In particolare, valgono le formule di Gauss-Green

$$\iint_S \partial_x G(x,y)\,dx\,dy = \int_{(\partial S)_+} G(x,y)\,dy\,,$$

$$\iint_S \partial_y F(x,y)\,dx\,dy = -\int_{(\partial S)_+} F(x,y)\,dx\,,$$

dove il bordo ∂S è parametrizzato dalle curve

$$\begin{aligned}\eta : [0,R]\to\mathbb{R}^2\,, &\qquad \eta(t) = t(\cos\alpha,\sin\alpha);\\ \sigma : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2\,, &\qquad \sigma(t) = (R\cos t, R\sin t);\\ \mu : [0,R]\to\mathbb{R}^2\,, &\qquad \mu(t) = (R-t)(\cos\beta,\sin\beta).\end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned}\iint_S \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y)\Big)\,dx\,dy &= \int_{(\partial S)_+}\Big(F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy\Big) \\ &= \int_\eta \Big(F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy\Big) \\ &\quad + \int_\sigma \Big(F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy\Big) \\ &\quad + \int_\mu \Big(F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy\Big).\end{aligned}$$

Scegliamo ora

$$\Big(F(x,y), G(x,y)\Big) = (-y, x).$$

Allora,

$$\iint_S \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y) \Big)\, dx\, dy = 2|S|.$$

D'altra parte,

$$\int_\eta \Big(F(x,y)\, dx + G(x,y)\, dy \Big) = \int_\mu \Big(F(x,y)\, dx + G(x,y)\, dy \Big) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \Big(F(x,y)\, dx + G(x,y)\, dy \Big) &= \int_\alpha^\beta \Big(F(R\cos t, R\sin t), G(R\cos t, R\sin t) \Big) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta \Big(-R\sin t, R\cos t \Big) \cdot (-R\sin t, R\cos t)\, dt \\
&= \int_\alpha^\beta R^2\, dt = (\beta - \alpha) R^2.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$2|S| = \iint_S \Big(-\partial_y F(x,y) + \partial_x G(x,y) \Big)\, dx\, dy = \int_{(\partial S)_+} \Big(F(x,y)\, dx + G(x,y)\, dy \Big) = (\beta - \alpha) R^2.$$

$\square$