Lo spazio duale di $L^p(\Omega)$

Funzionali lineari continui su $L^p(\Omega)$

Siano $p \in [1, +\infty]$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Diciamo che

$$T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$$

è un funzionale lineare continuo su $L^p(\Omega)$, se:

- T è lineare, ovvero:
$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g),$$
per ogni $f, g \in L^p(\Omega)$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- T è continuo, ovvero:
$$f_n \to f \quad \text{in} \quad L^p(\Omega) \qquad \Rightarrow \qquad T(f_n) \to T(f) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\,.$$

È noto il seguente teorema:

Teorema 1. *Sia $T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare sullo spazio $L^p(\Omega)$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *T è continuo;*

(ii) *T è limitato, ovvero:*

$$\|T\| := \sup\Big\{T(f) \ : \ f \in L^p(\Omega)\,, \ \|f\|_{L^p(\Omega)} \le 1\Big\} < +\infty\,.$$

Esempio 2. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Siano*

$$q := \frac{p}{p-1} \qquad e \qquad g \in L^q(\Omega).$$

Allora, il funzionale

$$T_g : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$$

definito come

$$T_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad f \in L^p(\Omega),$$

è un funzionale lineare continuo su $L^p(\Omega)$. Inoltre, si ha che

$$\|T\| = \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Infatti, per ogni $f \in L^p(\Omega)$, con $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 1$, abbiamo:

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \le \|g\|_{L^q(\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|g\|_{L^q(\Omega)},$$

mentre scegliendo la funzione

$$f := \frac{1}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}}|g|^{q-2}g$$

abbiamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \frac{1}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^{(q-1)p}}\int_\Omega |g|^{p(q-1)}\,dx = \frac{1}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^q}\int_\Omega |g|^q\,dx = 1,$$

$$T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{\|g\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}}\int_\Omega |g|^q\,dx = \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema di rappresentazione di Riesz per gli spazi $L^p(\Omega)$

Teorema 3. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Sia*

$$T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$$

una funzione lineare e limitata. Allora, esiste un'unica funzione

$$g \in L^q(\Omega) \qquad \textit{dove} \qquad q := \frac{p}{p-1}\,,$$

tale che

$$T(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \quad \textit{per ogni} \quad f \in L^p(\Omega)\,.$$

In particolare,

$$\|T\| = \sup\Big\{T(f) \ : \ f \in L^p(\Omega)\,,\ \|f\|_{L^p(\Omega)} \le 1\Big\} = \|g\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Dimostrazione per $p \in (1, 2]$.

Step 1. Sia $\Omega := [-R, R]^d$. Per ogni $n \ge 1$ consideriamo la partizione

$$\mathcal{P}_n := \Big\{Q_j \ : \ j = 1, \dots, 2^{nd}\Big\}\,,$$

di Ω in 2^{nd} cubi uguali Q_j, $j = 1, \dots, n^d$, di lato $R/2^n$. Sia

$$V_n \subset L^p(\Omega)$$

lo spazio di funzioni $u \in L^p(\Omega)$ della forma

$$u(x) = \sum_{j=1}^{2^{nd}} a_j \mathbb{1}_{Q_j}(x).$$

Osserviamo che per costruzione la successione di spazi V_n è crescente

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n \subset \dots$$

Inoltre, per ogni $u \in V_n$ si ha

$$T(u) = \sum_{j=1}^{2^{nd}} a_j T(\mathbb{1}_{Q_j}).$$

Definiamo la funzione

$$g_n(x) := \sum_{j=1}^{2^{nd}} \frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|} \mathbb{1}_{Q_j}(x).$$

Allora, per costruzione,

$$T(u) := \int_\Omega g_n(x)u(x)\,dx \quad \text{per ogni} \quad u \in V_n\,,$$

ed anche

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} = \sup\Big\{\int_\Omega g_n(x)u(x)\,dx \ : \ u \in V_n\,,\ \|u\|_{L^p(\Omega)} \le 1\Big\} \le \|T\|,$$

dove l'estremo superiore è raggiunto nella funzione

$$f_n \in V_n\ , \qquad f_n(x) := \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^{q-1} \mathbb{1}_{Q_j}(x).$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_{L^q(\Omega)} &= \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^q |Q_j|\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^q |Q_j|\right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^q |Q_j| \\
&= \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^q |Q_j|\right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^{2^{nd}} T(\mathbb{1}_{Q_j}) \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^{q-1} = \int_\Omega g_n(n) f_n(x)\,dx,
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{L^p(\Omega)} &= \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^{p(q-1)} |Q_j|\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \left(\sum_{j=1}^{2^{nd}} \left(\frac{T(\mathbb{1}_{Q_j})}{|Q_j|}\right)^{q} |Q_j|\right)^{1/p} = \frac{1}{\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}} \left(\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q\right)^{1/p} = 1.
\end{aligned}$$

Sia ora $m \geq n$. Allora:

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega f_n(x) g_n(x)\,dx = T(f_n) = \int_\Omega f_n(x) g_m(x)\,dx \leq \|g_m\|_{L^q(\Omega)}.$$

Si ha quindi che la successione $\|g_n\|_{L^q(\Omega)}$ è crescente e limitata da $\|T\|$. Quindi, esiste il limite

$$L := \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^q(\Omega)} \leq \|T\|.$$

(Usando il fatto che l'unione degli spazi V_n è un denso in L^p, si può dedurre che $L = \|T\|$.)

Ora, siccome $q \geq 2$, possiamo usare la disuguaglianza di Clarkson:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{g_m - g_n}{2}\right\|_{L^q(\Omega)}^q &\leq \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q(\Omega)}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q - \left\|\frac{g_m + g_n}{2}\right\|_{L^q(\Omega)}^q \\
&\leq \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q(\Omega)}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q - \left|\int_\Omega f_n(x)\,\frac{g_m(x) + g_n(x)}{2}\,dx\right|^q \\
&= \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q(\Omega)}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q - \left|\int_\Omega f_n(x)\,g_n(x)\,dx\right|^q \\
&= \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q(\Omega)}^q + \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q - \|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q \\
&= \frac{1}{2}\|g_m\|_{L^q(\Omega)}^q - \frac{1}{2}\|g_n\|_{L^q(\Omega)}^q .
\end{aligned}$$

Quindi, la successione g_n è di Cauchy in $L^q(\Omega)$ e di conseguenza g_n converge in $L^q(\Omega)$ ad una funzione

$$g \in L^q(\Omega)\ , \qquad g = \lim_{n\to\infty} g_n\,.$$

Sia ora

$$u \in L^p(\Omega)$$

una qualsiasi funzione fissata. Esiste una successione $u_n \in L^p(\Omega)$ tale che

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \qquad \text{e} \qquad u_n \in V_n \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1.$$

Allora, si ha che

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(u_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n(x) u_n(x)\,dx = \int_\Omega u(x) g(x)\,dx\,,$$

il che conclude la dimostrazione nel caso $1 < p \leq 2$ e $\Omega := [-R, R]^d$.

Step 2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile limitato. Scegliamo R abbastanza grande in modo che $\Omega \subset \Omega_R := [-R, R]^d$. Definiamo la mappa

$$\pi : L^p(\Omega_R) \to L^p(\Omega)$$

come

$$\pi(u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_R \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

e definiamo l'operatore lineare

$$S : L^p(\Omega_R) \to \mathbb{R}$$

come

$$S(u) = T(\pi(u)).$$

Esiste quindi una funzione

$$g \in L^p(\Omega_R)$$

tale che

$$S(u) = \int_{\Omega_R} u(x)g(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Sia ora f una qualsiasi funzione in $L^p(\Omega)$ e sia

$$\tilde{f} \in L^p(\Omega_R)\ , \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_R \setminus \Omega\,. \end{cases} \quad .$$

Siccome $\pi(\tilde{f}) = f$, abbiamo che

$$T(f) = T(\pi(\tilde{f})) = S(\tilde{f}) = \int_{\Omega_R} \tilde{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx$$

il che conclude la dimostrazione nel caso Ω limitato.

Step 3. Dimostrazione nel caso $p \in (1, 2]$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ qualsiasi. Usare lo stesso argomento di Step 1 con V_n definito come lo spazio delle funzioni supportate nella palla di raggio n. □

Dimostrazione per $p \in [2, +\infty)$.

Step 1. Sia

$$K := Ker(T) = \Big\{ f \in L^p(\Omega) \ : \ T(f) = 0 \Big\}.$$

Osserviamo che K è un sottospazio lineare chiuso di $L^p(\Omega)$. Data una funzione $u \in L^p(\Omega)$, dimostrare che esiste un'unica funzione $v \in K$ (detta proiezione di u su K) tale che:

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} = \inf \Big\{ w \in K \ : \ \|u - w\|_{L^p(\Omega)} \Big\}.$$

Inoltre, si ha che

$$\int_\Omega \varphi(x)(u - v)|u - v|^{p-2}\,dx = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in K.$$

Step 2. Sia $u \in L^p(\Omega)$ una funzione tale che

$$T(u) = 1$$

e sia v la proiezione di v su K. Scegliendo $w = u - v$, abbiamo che

$$T(w) = 1.$$

Definiamo

$$g := \frac{w|w|^{p-2}}{\|w\|_{L^p}^p}.$$

Sia ora $f \in L^p(\Omega)$ una qualsiasi funzione. Siccome $f - T(f)w \in K$ abbiamo che

$$\int_\Omega g(f - T(f)w)\, dx = 0.$$

Quindi,

$$\int_\Omega g(x)f(x) = T(f) \int_\Omega g(x)w(x)\, dx = T(f),$$

il che conclude la dimostrazione. □