Teorema di Hahn-Banach

Teorema 1 (Hahn-Banach)**.** *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Siano V un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}$, $C > 0$ una costante e $T : V \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che*

$$|T(v)| \le C\|v\|_{\mathcal{B}} \qquad \textit{per ogni} \qquad v \in V.$$

Allora, esiste un'applicazione lineare continua $S : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che:

(1) $S(v) = T(v)$ *per ogni* $v \in V$;

(2) $|S(b)| \le C\|b\|_{\mathcal{B}}$ *per ogni* $b \in \mathcal{B}$.

Corollario 2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Per ogni elemento $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, esiste un'applicazione lineare continua $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $T(b) = 1$.*

Il lemma principale

Lemma 3. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Siano V un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}$, $C > 0$ una costante e $T : V \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che*

$$|T(v)| \le C\|v\|_{\mathcal{B}} \qquad \textit{per ogni} \qquad v \in V.$$

Dato un elemento $z \in \mathcal{B} \setminus V$, consideriamo lo spazio vettoriale W generato da V e z:

$$W := \Big\{u + \alpha z \ : \ u \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Allora, esiste un'applicazione lineare continua $S : W \to \mathbb{R}$ tale che:

(1) $S(v) = T(v)$ *per ogni* $v \in V$;

(2) $|S(w)| \le C\|w\|_{\mathcal{B}}$ *per ogni* $w \in W$.

Dimostrazione. Per ogni $w = v + \alpha z$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo

$$S(w) = T(v) + \alpha S(z),$$

dove la costante $S(z)$ sarà definità in seguito in modo tale d'avere

$$|S(w)| \le C\|w\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni} \quad w \in W.$$

Per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta > 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &\le C\|\alpha u + \beta v\|_{\mathcal{B}} \\ &= C\|\alpha(u - \beta z) + \beta(v + \alpha z)\|_{\mathcal{B}} \\ &\le C\|\alpha(u - \beta z)\|_{\mathcal{B}} + C\|\beta(v + \alpha z)\|_{\mathcal{B}} \\ &= C\alpha\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}} + C\beta\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}}\ , \end{aligned}$$

che possiamo scrivere anche come

$$\alpha\Big(T(u) - C\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}}\Big) \le -\beta\Big(T(v) - C\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}}\Big),$$

o ancora

$$\frac{1}{\beta}\Big(T(u)-C\|u-\beta z\|_{\mathcal{B}}\Big)\le -\frac{1}{\alpha}\Big(T(v)-C\|v+\alpha z\|_{\mathcal{B}}\Big).$$

Siccome $\alpha>0$ e $\beta>0$ sono arbitrari, abbiamo che esiste $s\in\mathbb{R}$ tale che:

$$\sup_{\beta>0}\Big\{\frac{1}{\beta}\Big(T(u)-C\|u-\beta z\|_{\mathcal{B}}\Big)\Big\}\le s\le \inf_{\alpha>0}\Big\{-\frac{1}{\alpha}\Big(T(v)-C\|v+\alpha z\|_{\mathcal{B}}\Big)\Big\}.$$

Definiamo

$$S(z)=s.$$

Per costruzione, abbiamo che:

$$S(u-\beta z)=T(u)-\beta s\le C\|u-\beta z\|_{\mathcal{B}}\qquad\text{per ogni}\qquad u\in V,\ \beta>0\ ;$$

$$S(v+\alpha z)=T(v)+\alpha s\le C\|v+\alpha z\|_{\mathcal{B}}\qquad\text{per ogni}\qquad v\in V,\ \alpha>0\ .$$

il che conclude la dimostrazione. □

Dimostrazione di Teorema 1 in uno spazio separabile

Supponiamo che $\mathcal{B}$ è separabile, ovvero che esiste un sottoinsieme denso numerabile $\mathcal{C}=\{\phi_n\}_{n\ge1}$ di $\mathcal{B}$. Consideriamo la successione di spazi:

$$V_0:=V\ ,\qquad T_0=T:V_0\to V;$$

$$V_n:=\begin{cases}V_{n-1}\quad\text{se}\quad \phi_n\in V_{n-1};\\ \Big\{u+\alpha\phi_n\ :\ u\in V_{n-1}\,,\ \alpha\in\mathbb{R}\Big\}\quad\text{se}\quad\phi_n\notin V_{n-1}\,.\end{cases}$$

e mappe

$$T_n:V_n\to\mathbb{R}$$

construite nel Lemma 3. Allora, per ogni $n\ge k$ si ha:

$$V_k\subset V_n\qquad\text{e}\qquad T_k=T_n\quad\text{su}\quad V_k.$$

Sullo spazio vettoriale

$$V_\infty:=\bigcup_{n\ge1}V_n\,,$$

definiamo la mappa

$$T_\infty:V_\infty\to\mathbb{R}$$

come

$$T_\infty(u)=T_k(u)\quad\text{per}\quad u\in V_k.$$

Per costruzione

$$|T_\infty(u)|\le C\|u\|_{\mathcal{B}}\quad\text{per ogni}\quad u\in V_\infty.$$

Inoltre, V_∞ è un sottospazio denso di $\mathcal{B}$. Per ogni $u\in\mathcal{B}$ definiamo $T(u)$ come

$$T(u)=\lim_{n\to\infty}T_\infty(u_n)$$

per una qualsiasi successione

$$u_n\in V_\infty\qquad\text{con}\qquad \|u_n-u\|_{\mathcal{B}}=0.$$

Allora, T è una mappa lineare e continua su $\mathcal{B}$ e

$$|T(u)|\le C\|u\|_{\mathcal{B}}\quad\text{per ogni}\quad u\in\mathcal{B},$$

il che conclude la dimostrazione. □

DIMOSTRAZIONE DI TEOREMA 1 NEL CASO GENERALE

Consideriamo la famiglia $\mathcal{X}$ di coppie spazio-mappa (W, S) tali che:

- $V \subset W \subset \mathcal{B}$;
- $S : W \to \mathbb{R}$ è una mappa lineare limitata tale che

$$|S(w)| \leq C\|w\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni} \quad w \in W;$$

- $S \equiv T$ su V.

Su $\mathcal{X}$ consideriamo la relazione d'ordine $(W_1, S_1) \leq (W_2, S_2)$, se:

$$W_1 \subset W_2 \subset \mathcal{B} \qquad \text{e} \qquad S_2 \equiv S_1 \quad \text{su} \quad W_1\,.$$

Data una catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{X}$, consideriamo la coppia $(W_\infty, S_\infty) \in \mathcal{X}$ definita come

$$W_\infty := \bigcup_{(W,S)\in\mathcal{C}} W\,; \qquad S_\infty(w) := S(w) \quad \text{per ogni} \quad w \in W \quad \text{ed ogni} \quad (W, S) \in \mathcal{C}.$$

Per costruzione, (W_∞, S_∞) è un maggiorante di $\mathcal{C}$. Allora, per il Lemma di Zorn, esiste un elemento massimale

$$(W_{max}, S_{max}) \in \mathcal{X}\,.$$

Infine, per il Lemma 3 si ha che necessariamente $W_{max} = \mathcal{B}$.