# Funzioni di Sobolev su intervalli

---

## Funzioni di Sobolev e derivate deboli

Dati un intervallo $I \subset \mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty]$, definiamo lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(I)$ come lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tali per cui esiste una funzione $v \in L^p(\Omega)$ con la proprietà seguente:

$$\int_I u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_I v(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

La funzione $v$ è detta **derivata debole** di $u$.

### Unicità della derivata debole

Supponiamo che, data $u \in L^p(I)$, esistono due funzioni $v, w \in L^p(\Omega)$ tali che:

$$\int_I u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_I v(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

$$\int_I u(x)\phi'(x)\,dx = -\int_I w(x)\phi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

Allora,

$$\int_I \Big(v(x) - w(x)\Big)\phi(x)\,dx = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad \phi \in C_c^1(I).$$

Di conseguenza,

$$v = w.$$

D'ora in poi useremo la notazione $u'$ per indicare la derivata debole di una funzione $u \in W^{1,p}(I)$.

---

## Esempi

**Esempio 1.** *Siano $I$ un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1$ su $I$ tale che:*

$$\int_I |f(x)|^p\,dx < +\infty \qquad e \qquad \int_I |f'(x)|^p\,dx < +\infty\ .$$

*Allora $f \in W^{1,p}(I)$ e la derivata debole di $f$ è esattamente $f'$. Infatti, per ogni $\phi \in C_c^1(I)$, si ha:*

$$\int_I f(x)\phi'(x)\,dx + \int_I f'(x)\phi(x) = \int_I (f(x)\phi(x))'\,dx = 0.$$

**Esempio 2.** *Consideriamo l'intervallo $I := [-1, 1]$ e la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \le 0, \\ x & se \quad x \ge 0. \end{cases}$$

*Allora, $f \in W^{1,p}(I)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$ e la sua derivata debole è data dalla funzione indicatrice*

$$f' = \mathbb{1}_{[0,1]}.$$

*Infatti, per ogni $\phi \in C^1_c(I)$ abbiamo:*

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\phi'(x)\,dx &= \int_0^1 x\phi'(x)\,dx\\ &= \Big[x\phi(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x'\phi(x)\,dx\\ &= -\int_0^1 \phi(x)\,dx\\ &= -\int_I \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\phi(x)\,dx.\end{aligned}$$

**Esempio 3.** *Consideriamo l'intervallo $I := [-1,1]$ e la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \le 0,\\ 1 & se \quad x > 0.\end{cases}$$

*Allora, $f \notin W^{1,p}(I)$ per nessun $p \in [1,+\infty]$. Infatti, per ogni $\phi \in C^1_c(I)$ abbiamo:*

$$\int_I f(x)\phi'(x)\,dx = \int_0^1 \phi'(x)\,dx = \Big[\phi(x)\Big]_0^1 = -\phi(0).$$

*Infine, basta osservare che vale il lemma seguente.*

**Lemma 4.** *Non esiste nessuna funzione $g \in L^1((-1,1))$ tale che*

$$\int_{-1}^1 g(x)\phi(x)\,dx = \phi(0) \qquad \textit{per ogni} \qquad \phi \in C^1_c((-1,1)). \tag{1}$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che $g \in L^1((-1,1))$ sia una funzione con la proprietà (1). In particolare, $g$ non può essere identicamente nulla e quindi esiste un intervallo aperto $(a,b) \subset \mathbb{R}^d$ tale che

$$\int_a^b g(x)\,dx \neq 0.$$

Possiamo inoltre supporre che $0 \notin (a,b)$. Infatti, se $0 \in (a,b)$, allora

$$0 \neq \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^0 g(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx$$

e quindi almeno uno fra gli integrali

$$\int_a^0 g(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^b g(x)\,dx$$

deve essere non-nullo. Quindi, rimpiazzando $(a,b)$ con $(0,b)$ oppure con $(a,0)$, otteniamo che esiste un intervallo $(a,b) \subset (-1,1)$ tale che:

$$\int_a^b g(x)\,dx \neq 0 \qquad \text{e} \qquad 0 \notin (a,b).$$

Sia ora $\varphi_n$ una successione crescente di funzioni $C^1_c((a,b))$ che converge alla funzione indicatrice $\mathbb{1}_{(a,b)}$. Allora, per il teorema della convergenza dominata

$$0 \neq \int_a^b g(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)g(x)\,dx\,.$$

D'altra parte, per ogni $n \ge 1$, si ha

$$\int_a^b \varphi_n(x)g(x)\,dx = \int_I \varphi_n(x)g(x)\,dx = \varphi_n(0) = 0.$$

Assurdo. $\square$