Equazioni ellittiche su intervalli. Formulazione variazionale

Soluzioni deboli e formulazione variazionale

Teorema 1 (Formulazione variazionale). *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$, $V \in L^1(I)$ una funzione non-negativa su I ed $f \in L^2(I)$. Allora, sono equivaleni:*

(1) *u è soluzione debole di*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,;$$

(2) *u minimizza il funzionale*

$$\mathcal{F}(\varphi) := \frac{1}{2}\int_I |\varphi'(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)\varphi^2(x)\,dx - \int_I \varphi(x)f(x)\,dx$$

fra tutte le funzioni $\varphi \in H^1_0(I)$.

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, osserviamo che

$$\mathcal{F}(u+\varphi) = \mathcal{F}(u) + \int_I \varphi' u'\,dx + \int_I V\varphi u\,dx - \int_I \varphi f\,dx + \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)\varphi^2\,dx\,.$$

in particolare, se u è soluzione debole, allora

$$\mathcal{F}(u+\varphi) = \mathcal{F}(u) + \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)\varphi^2\,dx \ge \mathcal{F}(u)\,,$$

per ogni $\varphi \in H^1_0(I)$ e quindi u minimizza $\mathcal{F}$ in $H^1_0(I)$.

Viceversa, se u minimizza $\mathcal{F}$, allora fissato $\varphi \in H^1_0(I)$, abbiamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$0 \le \mathcal{F}(u+\varphi) - \mathcal{F}(u) = t\bigg(\int_I \varphi' u'\,dx + \int_I V\varphi u\,dx - \int_I \varphi f\,dx\bigg) + \frac{t^2}{2}\bigg(\int_I (\varphi')^2\,dx + \int_I V(x)\varphi^2\,dx\bigg),$$

e quindi necessariamente

$$\int_I \varphi' u'\,dx + \int_I V\varphi u\,dx - \int_I \varphi f\,dx = 0.$$

Siccome $\varphi \in H^1_0(I)$ è arbitraria, otteniamo che u è soluzione debole di

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

□

Unicità delle soluzioni deboli

Teorema 2. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$, $V \in L^1(I)$ una funzione non-negativa su I ed $f \in L^2(I)$. Se u e w sono soluzioni deboli di*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,,$$

$$-w'' + Vw = f \quad in \quad I\,, \qquad w \in H^1_0(I)\,,$$

allora $u = w$.

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione $u-w$ è soluzione debole di

$$-(u-w)''+V(u-w)=0 \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u-w\in H^1_0(I)\,.$$

Quindi, testando con la funzione $\varphi=u-w$, otteniamo

$$\int_I (u'-w')^2\,dx+\int_I V(u-w)^2=0.$$

In particolare,

$$u-w\equiv \textit{costante} \qquad \text{su} \quad I.$$

Siccome $u-w\in H^1_0(I)$, otteniamo che $u\equiv w$. □

Disuguaglianza di Poincaré

Teorema 3. *Sia $I=(a,b)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$. Allora, per ogni funzione $u\in H^1(a,b)$ tale che $u(a)=0$, abbiamo*

$$\int_I u^2\,dx\le 4|I|^2\int_I (u')^2\,dx\,.$$

In particolare,

$$\int_I u^2\,dx\le |I|^2\int_I (u')^2\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad u\in H^1_0(I)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $x\in(a,b)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} u^2(x):=u^2(x)-u^2(a)&=2\int_a^x u(t)u'(t)\,dt\\ &\le 2\Big(\int_a^x u^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_a^x (u')^2\,dt\Big)^{1/2}\\ &\le 2\Big(\int_I u^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_I (u')^2\,dt\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Integrando in x, otteniamo

$$\int_I u^2(x)\,dx\le 2|I|\Big(\int_I u^2\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_I (u')^2\,dt\Big)^{1/2},$$

e quindi

$$\int_I u^2\,dx\le 4|I|^2\int_I (u')^2\,dx\,.$$

□

Esistenza di soluzioni deboli

Teorema 4. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$, $V\in L^1(I)$ una funzione non-negativa su I ed $f\in L^2(I)$. Allora, esiste un minimo $u\in H^1_0(I)$ del funzionale*

$$\mathcal{F}:H^1_0(I)\to\mathbb{R}\,, \qquad \mathcal{F}(\varphi):=\frac12\int_I|\varphi'(x)|^2\,dx+\frac12\int_I V(x)\varphi^2(x)\,dx-\int_I\varphi(x)f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Sia $u_n \in H^1_0(I)$ una successione minimizzante. Precisamente, supponiamo che $\mathcal{F}(u_n)$ sia decrescente e che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(u_n) = \inf \Big\{ \mathcal{F}(\varphi) \ : \ \varphi \in H^1_0(I) \Big\}.$$

Inoltre, siccome

$$\mathcal{F}(0) = 0,$$

possiamo supporre che

$$\mathcal{F}(u_n) \le 0 \quad \text{per ogni} \quad n \ge 1.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_I (u_n')^2\,dx &\le \frac{1}{2}\int_I (u_n')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V u_n^2\,dx \\
&\le \int_I f u_n\,dx \\
&\le \Big(\int_I f^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_I u_n^2\,dx\Big)^{1/2} \\
&\le |I|\Big(\int_I f^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_I (u_n')^2\,dx\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza di Poincaré. In cocnlusione,

$$\|u_n'\|_{L^2(I)} \le 2|I|\|f\|_{L^2(I)}\,,$$

e usando di nuovo la disuguaglianza di Poincaré

$$\|u_n\|_{L^2(I)} \le 2|I|^2\|f\|_{L^2(I)}\,.$$

Quindi, la successione u_n è limitata in $H^1(I)$. Di conseguenza, esistono $u \in H^1_0(I)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che:

- u_{n_k} converge a u debolmente in $H^1(I)$;
- u_{n_k} converge a u fortemente in $L^\infty(I)$.

Siccome

$$\int_I (u')^2\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_I (u_{n_k}')^2\,dx\,,$$

$$\int_I V u^2\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_I V u_{n_k}^2\,dx\,,$$

$$\int_I f u\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_I f u_{n_k}\,dx\,,$$

otteniamo che

$$\mathcal{F}(u) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{F}(u_{n_k})\,,$$

e quindi u è un minimo di $\mathcal{F}$ in $H^1_0(I)$. $\square$