Convergenza di successioni di soluzioni deboli

Convergenza forte delle soluzioni deboli

Proposizione 1. *Siano I intervallo aperto e limitato. Sia $f_n \in L^2(I)$ una successione di funzioni che converge debolmente in $L^2(I)$ ad una funzione $f \in L^2(I)$. Sia V_n una successione di funzioni non-negative in $L^2(I)$ che converge debolmente in $L^2(I)$ ad una funzione $V \in L^2(I)$. Sia u la soluzione debole di*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,,$$

e, per ogni $n \geq 1$, sia u_n la soluzione debole di

$$-u_n'' + V_n u_n = f_n \quad in \quad I\,, \qquad u_n \in H^1_0(I)\,.$$

Allora $u_n \to u$ fortemente in $H^1_0(I)$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che la successione u_n è limitata in $H^1_0(I)$. Infatti, siccome u_n minimizza il funzionale

$$\mathcal{F}_n(\varphi) := \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2 + \frac{1}{2}\int_I V_n\varphi^2 - \int_I f_n\varphi\,,$$

fra tutte le funzioni in $H^1_0(I)$, otteniamo che

$$0 \leq \mathcal{F}_n(\varphi) := \frac{1}{2}\int_I (u_n')^2 + \frac{1}{2}\int_I V_n u_n^2 - \int_I f_n u_n\,.$$

In particolare,

$$\frac{1}{2}\int_I (u_n')^2 \leq \int_I f_n u_n \leq \Big(\int_I f_n^2\Big)^{1/2}\Big(\int_I u_n^2\Big)^{1/2}.$$

Per la disugiaglianza di Poincaré, esiste una costante $C > 0$ (che dipende solo da I) tale che

$$\int_I u_n^2 \leq C\int_I (u_n')^2.$$

Di conseguenza

$$\int_I (u_n')^2 \leq 2C^{1/2}\Big(\int_I f_n^2\Big)^{1/2}\Big(\int_I (u_n')^2\Big)^{1/2},$$

e quindi

$$\int_I (u_n')^2 \leq 4C\int_I f_n^2\,.$$

Siccome f_n converge debolmente a f in $L^2(I)$, abbiamo che la successione $\displaystyle\int_I f_n^2$ è limitata e quindi lo è anche la successione $\displaystyle\int_I (u_n')^2$. Usando, di nuovo la disuguaglianza di poincaré, otteniamo anche la limitatezza della successione

$$\int_I (u_n')^2 + \int_I u_n^2\,.$$

Di conseguenza, esistono una sottosuccessione u_{n_k} ed una funzione $w \in H^1_0(I)$ tali che:

$$\begin{aligned} u_{n_k}' &\rightharpoonup w' \quad \text{debolmente in} \quad L^2(I)\,;\\ u_{n_k} &\to w \quad \text{fortemente in} \quad L^2(I)\,;\\ u_{n_k} &\to w \quad \text{fortemente in} \quad L^\infty(I)\,. \end{aligned}$$

Ora, per ogni funzione test $\varphi \in H_0^1(I)$, abbiamo

$$\int_I u'_{n_k}\varphi'\,dx + \int_I V_{n_k}(x)u_{n_k}\varphi\,dx = \int_I f_{n_k}(x)\varphi\,dx.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, otteniamo che

$$\int_I w'\varphi'\,dx + \int_I V(x)w\varphi\,dx = \int_I f(x)\varphi\,dx\,,$$

e quindi $w \equiv u$.

Per stabilire la convergenza forte basta dimostrare che

$$u'_{n_k} \to w' \quad \text{fortemente in} \quad L^2(I)\,,$$

che (data la convergenza debole $u'_{n_k} \rightharpoonup w'$) è equivalente a

$$\int_I (u'_{n_k})^2 \to \int_I (w')^2\,.$$

ora, per ogni k, ussiamo la stessa funzione u_{n_k} come test nell'equazione per u_{n_k}. Quindi:

$$\int_I (u'_{n_k})^2 = \int_I f_{n_k}u_{n_k} - \int_I V_{n_k}u_{n_k}^2\,.$$

Passando al limite otteniamo che

$$\lim_{k\to+\infty}\int_I (u'_{n_k})^2 = \lim_{k\to+\infty}\int_I f_{n_k}u_{n_k} - \lim_{k\to+\infty}\int_I V_{n_k}u_{n_k}^2 = \int_I fu - \int_I Vu^2\,,$$

e usando u come test nell'equazione per u,

$$\int_I fu - \int_I Vu^2 = \int_I (u')^2.$$

In conclusione

$$\int_I (u')^2 = \lim_{k\to+\infty}\int_I (u'_{n_k})^2$$

e la convergenza $u_{n_k} \to u$ è forte in $H_0^1(I)$. In particolare, abbiamo ottenuto che ogni sottosuccessione di u_n ammette una sotto-sottosuccessione che converge a u. Quindi $u_n \to u$ fortemente in $H_0^1(I)$. $\square$

Un problema che ammette soluzione debole, ma non soluzione forte

Esercizio 2. *Sia $I = (-1, 1)$. Consideriamo una successione V_n di funzioni non-negative e tali che:*

(a) *per ogni $n \geq 1$, $V_n \in L^1(I)$, ma $V_n \notin L^2(I)$;*

(b) *per ogni $n \geq 1$, V_n è supportata nell'intervallo $\big(-1/2, 1/2\big)$;*

(c) *$V_n \to 0$ fortemente in $L^1(I)$.*

Per ogni $n \geq 1$, consideriamo la soluzione debole u_n del problema

$$-u_n'' + V_n u_n = 1 \quad in \quad I\;, \qquad u_n \in H_0^1(I).$$

1. *Mostrare che la successione u_n è limitata in $H_0^1(I)$.*
2. *Mostrare che u_n converge debolmente in H^1 e fortemente in L^∞ alla funzione $u(x) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.*
3. *Mostrare che per n abbastanza grande $u_n V_n \notin L^2(I)$ e dedurre che $u_n \notin H^2(I)$.*