Prodotto tra funzioni di Sobolev

Prodotto con una funzione di Sobolev regolare

Proposizione 1. *Siano I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e $p \in [1, +\infty)$.*
Siano

$$\eta \in C^1(I) \cap W^{1,p}(I) \qquad e \qquad u \in W^{1,p}(I).$$

Allora,

$$\eta\, u \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (\eta u)' = \eta' u + u' \eta\,.$$

Inoltre, esiste una costante C che dipende solo da I da p tale che

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \le C\|\eta\|_{W^{1,p}(I)}\|u\|_{L^p(I)} \qquad e \qquad \|(\eta u)'\|_{L^p(I)} \le C\|\eta\|_{W^{1,p}(I)}\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che siccome $\eta \in W^{1,p}(I)$, abbiamo che $\eta \in L^\infty(I)$ e vale la stima

$$\|\eta\|_{L^\infty(I)} \le C\|\eta\|_{W^{1,p}(I)}\,,$$

per una qualche costante C che dipende solo da I e da p. Analogamente, $u \in L^\infty(I)$ e

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)}\,.$$

Quindi, abbiamo le stime

$$\|\eta u\|_{L^p(I)} \le \|\eta\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{L^p(I)} \qquad \text{e} \qquad \|\eta u\|_{L^p(I)} \le \|u\|_{L^\infty(I)}\|\eta\|_{L^p(I)}.$$

Inoltre, $\eta' u + u'\eta \in L^p(I)$ e si ha la stima

$$\begin{aligned}
\|\eta' u + u'\eta\|_{L^p(I)} &\le \|\eta' u\|_{L^p(I)} + \|u'\eta\|_{L^p(I)} \\
&\le \|\eta'\|_{L^p(I)}\|u\|_{L^\infty(I)} + \|\eta\|_{L^\infty(I)}\|u'\|_{L^p(I)} \\
&\le C\|\eta'\|_{L^p(I)}\|u\|_{W^{1,p}(I)} + C\|\eta\|_{W^{1,p}(I)}\|u'\|_{L^p(I)} \\
&\le 2C\|u\|_{W^{1,p}(I)}\|\eta\|_{W^{1,p}(I)}.
\end{aligned}$$

Per concludere, basta dimostrare che $\eta' u + u'\eta$ sia la derivata debole di ηu.
Data una qualsiasi funzione $\varphi \in C^1_c(I)$, osserviamo che $\varphi\eta \in C^1_c(I)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_I \eta u \varphi' \,dx = \int_I u\Big((\eta\varphi)' - \eta'\varphi\Big)\,dx &= \int_I u(\eta\varphi)'\,dx - \int_I \eta'\varphi\,dx \\
&= -\int_I u'\eta\varphi\,dx - \int_I \eta'\varphi\,dx \\
&= -\int_I \varphi(x)\Big(u'\eta + \eta' u\Big)\,dx.
\end{aligned}$$

□

Prodotto tra due funzioni $W^{1,p}(I)$

Teorema 2. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(I)$ e $v \in W^{1,p}(I)$, allora*

$$uv \in W^{1,p}(I) \qquad e \qquad (uv)' = u'v + uv'\,.$$

Dimostrazione. Sia u_n una successione in $C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ che converge a u fortemente in $W^{1,p}(I)$. Per ogni $n \geq 1$, abbiamo che

$$u_n v \in W^{1,p}(I) \qquad \text{e} \qquad (u_n v)' = u_n' v + u_n v' \ .$$

Siccome

$$\|u_n v - uv\|_{L^p(I)} \leq \|v\|_{L^\infty(I)} \|u_n - u\|_{L^p(I)}$$

abbiamo che $u_n v \to uv$ fortemente in L^p. Quindi, basta dimostrare che $u_n v$ sia di Cauchy in $W^{1,p}$.

$$\begin{aligned}
\|(u_n v)' - (u_m v)'\|_{L^p(I)} &= \|(u_n' v + u_n v') - (u_m' v + u_m v')\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|(u_n' - u_m')v\|_{L^p(I)} + \|(u_n - u_m)v'\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|v\|_{L^\infty} \|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} + \|u_n - u_m\|_{L^\infty(I)} \|v'\|_{L^p(I)} \\
&\leq \|v\|_{L^\infty} \|u_n' - u_m'\|_{L^p(I)} + C\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)} \|v'\|_{L^p(I)},
\end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$