Limitatezza delle funzioni di Sobolev su un intervallo

Lemma di approssimazione

Lemma 1. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty)$. Se esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I),$$

allora

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(I).$$

Dimostrazione. Prendiamo una qualsiasi funzione $u \in W^{1,p}(I)$. Per il teorema di approssimazione, esiste una successione $u_n \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{1,p}(I)$. In particolare, u_n è di Cauchy in $W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(I)} \le \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(I)},$$

abbiamo che u_n è di Cauchy in $L^\infty(I)$ e quindi u_n converge ad una qualche funzione $\widetilde{u}$ in $L^\infty(I)$. Siccome, allo stesso tempo, u_n converge a u in $L^p(I)$, otteniamo che necessariamente $u = \widetilde{u}$. Quindi, passando al limite la disuguaglianza

$$\|u_n\|_{L^\infty(I)} \le \|u_n\|_{W^{1,p}(I)}$$

otteniamo che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

□

Stima $L^\infty(I) - W^{1,p}(I)$ per funzioni di Sobolev

Teorema 2. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty]$. Allora, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ ed esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(I).$$

Dimostrazione.
Caso 1. $p = +\infty$. La dimostrazione in questo caso è immediata. Infatti,

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le \|u\|_{W^{1,\infty}(I)} = \|u\|_{L^\infty(I)} + \|u'\|_{L^\infty(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,\infty}(I).$$

Caso 2. Supponiamo che $p = 1$ e che I sia illimitato.
Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto $x_\varepsilon \in I$ tale che

$$|u(x_\varepsilon)| \le \varepsilon.$$

Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo

$$\begin{aligned} |u(x)| &\le |u(x) - u(x_\varepsilon)| + |u(x_\varepsilon)| \\ &\le \Big|\int_{x_\varepsilon}^x u'(t)\,dt\Big| + \varepsilon \le \|u'\|_{L^1(I)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Siccome ε è arbitrario, otteniamo che in questo caso

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \le \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Caso 3. Supponiamo che $p = 1$ e che I sia limitato.
Possiamo trovare un punto x_0 tale che

$$|u(x_0)| \leq \frac{1}{|I|} \int_I |u(x)|\,dx.$$

Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo

$$\begin{aligned}|u(x)| &\leq |u(x) - u(x_0)| + |u(x_0)| \\ &\leq \Big|\int_{x_0}^x u'(t)\,dt\Big| + \frac{1}{|I|}\int_I |u(x)|\,dx \leq \|u'\|_{L^1(I)} + \frac{1}{|I|}\int_I |u(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Caso 4. Supponiamo che $p \in (1, +\infty)$ e che I sia illimitato.
Sia $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\int_I |u(x)|^p\,dx < +\infty,$$

abbiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $x_\varepsilon \in I$ tale che

$$|u(x_\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Quindi, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned}|u(x)|^p &\leq |u(x)^p - u(x_\varepsilon)^p| + |u(x_\varepsilon)^p| \\ &\leq \Big|\int_{x_\varepsilon}^x u'(t)|u(t)|^{p-1}\,dt\Big| + \varepsilon^p \\ &\leq \int_I |u'(t)||u(t)|^{p-1}\,dt + \varepsilon^p \\ &\leq \|u'\|_{L^p(I)}\|u\|_{L^p(I)}^{p-1} + \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Ora, usando la disuguaglianza di Young

$$AB \leq \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{B}^q$$

per

$$A := \|u'\|_{L^p(I)} \qquad \text{e} \qquad B = \|u\|_{L^p(I)}^{p-1},$$

otteniamo

$$\begin{aligned}|u(x)|^p &\leq \frac{1}{p}\|u'\|_{L^p(I)}^p + \frac{p-1}{p}\|u\|_{L^p(I)}^p + \varepsilon^p \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}^p + \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è arbitrario, otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I).$$

Caso 5. Supponiamo che $p \in (1, +\infty)$ e che I sia limitato.
Sia $u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$. Siccome

$$\int_I |u(x)|^p\,dx < +\infty,$$

possiamo trovare $x_0 \in I$ tale che

$$|u(x_0)|^p \leq \frac{1}{|I|}\int_I |u(x)|^p\,dx.$$

Quindi, per ogni $x \in I$,

$$
\begin{aligned}
|u(x)|^p &\le |u(x)^p - u(x_0)^p| + |u(x_0)^p| \\
&\le \Big| \int_{x_0}^{x} u'(t)|u(t)|^{p-1}\,dt \Big| + \frac{1}{|I|}\int_I |u(x)|^p\,dx \\
&\le \int_I |u'(t)||u(t)|^{p-1}\,dt + \frac{1}{|I|}\int_I |u(x)|^p\,dx \\
&\le \|u'\|_{L^p(I)}\|u\|_{L^p(I)}^{p-1} + \frac{1}{|I|}\|u\|_{L^p(I)}^p.
\end{aligned}
$$

Usando di nuovo la disuguaglianza di Young con

$$
A := \|u'\|_{L^p(I)} \qquad \text{e} \qquad B = \|u\|_{L^p(I)}^{p-1},
$$

otteniamo

$$
|u(x)|^p \le \frac{1}{p}\|u'\|_{L^p(I)}^p + \frac{p-1}{p}\|u\|_{L^p(I)}^p + \frac{1}{|I|}\|u\|_{L^p(I)}^p \le \Big(1 + |I|^{-1}\Big)\|u\|_{W^{1,p}(I)}^p.
$$

Quindi,

$$
\|u\|_{L^\infty(I)} \le \Big(1 + |I|^{-1}\Big)\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad u \in C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I).
$$

□

La convergenza forte $W^{1,p}(I)$ implica la convergenza uniforme

Teorema 3. *Sia I un intervallo aperto in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty]$. Se $u_n \in W^{1,p}(I)$ è una successione che converge fortemente in $W^{1,p}$ ad una certa funzione $u \in W^{1,p}(I)$, allora u_n converge a u in $L^\infty(I)$.*

Le successioni limitate in $W^{1,p}(I)$ sono compatte in $C(I)$

Teorema 4. *Sia I un intervallo aperto e* **limitato** *in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Ogni successione limitata in $W^{1,p}(I)$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente.*

Dimostrazione. Sia u_n una successione limitata in $W^{1,p}(I)$. Siccome

$$
\|u_n\|_{L^\infty(I)} \le C\|u_n\|_{W^{1,p}(I)},
$$

abbiamo che u_n è equilimitata su I. Inoltre, per ogni $x, y \in I$, con $x < y$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
|u_n(y) - u_n(x)| = \Big| \int_x^y u_n'(t)\,dt \Big| &\le \int_x^y |u_n'(t)|\,dt \\
&\le |y - x|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_x^y |u_n'(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \le |y - x|^{\frac{p-1}{p}} \|u_n'\|_{L^p(I)},
\end{aligned}
$$

e quindi u_n è equicontinua. □

Corollario 5. *Sia I un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$.*
Allora, la palla unitaria in $W^{1,p}(I)$

$$
\Big\{ u \in W^{1,p}(I) \;:\; \|u\|_{W^{1,p}} \le 1 \Big\},
$$

è un sottoinsieme compatto di $L^p(I)$.

Esempio 6. *Consideriamo una funzione* $\phi \in C_c^\infty((-1,1))$ *tale che*

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)\,dt = 1 \qquad e \qquad \phi \geq 0 \quad su \quad \mathbb{R}.$$

Definiamo le funzioni

$$\phi_n(x) := n\phi(nx) \quad per\ ogni \quad x \in \mathbb{R}\,;$$

$$\Phi_n(x) = \int_{-1}^{x} \phi_n(t)\,dt\,.$$

Allora, $\Phi_n \in W^{1,1}(I)$ *con* $\Phi_n'(x) = \phi_n(x)$. *Inoltre,*

$$\|\phi_n\|_{L^1(-1,1)} = \int_{-1}^{1} \phi_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} n\phi(nx)\,dx = \int_{-1/n}^{1/n} n\phi(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} \phi(y)\,dy = 1\,;$$

$$\|\Phi_n\|_{L^1(-1,1)} \leq 2\|\Phi_n\|_{L^\infty(-1,1)} \leq 1\,,$$

quindi la successione Φ_n *è limitata in* $W^{1,1}(-1,1)$. *Ora, osserviamo che il supporto di* ϕ_n *è contenuto in* $(-1/n, 1/n)$. *Quindi:*

$$\Phi_n(x) := \begin{cases} 0 & se \quad x \leq -1/n\,, \\ 1 & se \quad x \geq 1/n\,, \end{cases}$$

il che implica

$$\Phi_n(x) \to \mathbb{1}_{\{0,+\infty\}}(x) \quad per\ Lebesgue\ quasi\text{-}ogni \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Ora, siccome le funzioni Φ_n *sono continue su* $(-1,1)$, *mentre l'indicatrice* $\mathbb{1}_{\{0,+\infty\}}$ *non lo è, abbiamo che nessuna sottosuccessione di* Φ_n *può convergere uniformemente a* $\mathbb{1}_{\{0,+\infty\}}$.

La convergenza debole $W^{1,p}(I)$ implica la convergenza uniforme

Teorema 7. *Sia* I *un intervallo aperto e* **limitato** *in* $\mathbb{R}$ *e sia* $p \in (1,+\infty)$. *Se* $u_n \in W^{1,p}(I)$ *è una successione che converge debolmente in* $W^{1,p}$ *ad una certa funzione* $u \in W^{1,p}(I)$, *allora* u_n *converge a* u *in* $L^\infty(I)$.

Dimostrazione. Sia u_n una successione in $W^{1,p}(I)$ debolmente convergente a $u \in W^{1,p}(I)$. In particolare, la successione $\|u_n\|_{W^{1,p}(I)}$ è limitata. Consideriamo una qualsiasi sottosuccessione u_{n_k} di u_n. Per Teorema 4, abbiamo che u_{n_k} ammette una sottosuccessione $u_{n_{k_j}}$ che converge in $L^\infty(I)$. Sia $v \in L^\infty(I)$ il limite uniforme

$$v := \lim_{j\to+\infty} u_{n_{k_j}}\,.$$

In particolare, per ogni $\varphi \in L^q(I)$, abbiamo

$$\int_I \varphi(x)v(x)\,dx = \lim_{j\to+\infty} \int_I \varphi(x)u_{n_{k_j}}(x)\,dx\,.$$

D'altra parte, siccome il funzionale

$$T : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}\,, \qquad T(w) := \int_I \varphi(x)w(x)\,dx\,,$$

è un funzionale lineare limitato su $W^{1,p}(I)$, la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$ implica

$$\int_I \varphi(x)u_n(x)\,dx = T(u_n) \to T(u) = \int_I \varphi(x)u(x)\,dx\,.$$

In conclusione, abbiamo che

$$\int_I \varphi(x)u(x)\,dx = \int_I \varphi(x)v(x)\,dx$$

e siccome $\varphi \in L^q(I)$ è arbitraria, otteniamo che $u \equiv v$. □

Esempio 8. *Sia I un intervallo aperto e* **illimitato** *in $\mathbb{R}$ e sia $p \in (1, +\infty)$. Esistono successioni limitate in $W^{1,p}(I)$ e che convergono debolmente a zero, ma che non convergono uniformemente a zero.*

Comportamento all'inifinito

Teorema 9. *Sia I un intervallo aperto e illimitato in $\mathbb{R}$ e sia $p \in [1, +\infty)$. Se $u \in W^{1,p}(I)$, allora*

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = 0.$$