Teoremi di approssimazione, estensione e compattezza su insiemi regolari

Partizione dell'unità

Teorema 1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e limitato di classe C^1. Allora, esistono funzioni ϕ_k, $k = 1, \ldots, N$, tali che:*

- *per ogni $k \in \{1, \ldots, N\}$, $\phi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $\phi_k \geq 0$ in $\mathbb{R}^d$;*
- *per ogni $k \in \{1, \ldots, N\}$, $\phi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ oppure $\phi_k \in C_c^\infty(\mathcal{C}_k)$, dove a meno di rotazioni e traslazioni $\mathcal{C}_k$ è dato da*
$$\mathcal{C}_k = B'_{r_k} \times (-\delta_k, \delta_k)\,,$$
ed ha la proporietà che esiste una funzione di classe C^1
$$\eta_k : B'_{2r_k} \to \mathbb{R},$$
a valori in $(-\delta_k, \delta_k)$ e tale per cui
$$\Omega \cap \Big(B'_{2r_k} \times (-2\delta_k, 2\delta_k)\Big) = \Big\{(x', x_d) \in B'_{2r_k} \times (-2\delta_k, 2\delta_k)\ :\ \eta(x') > x_d\Big\};$$
- *$\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \phi_k(x) = 1$ per ogni $x \in \Omega$.*

Teorema di approssimazione in $W^{1,p}(\Omega)$

Teorema 2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e limitato di classe C^1. Sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione u_n di funzioni C^∞, ciascuna definita in un intorno di $\overline{\Omega}$, tali che $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia ϕ_k, $k = 1, \ldots, N$, la partizione dell'unità associata a Ω. Per ogni k, definiamo $u_k := \phi_k u$. Allora, $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ e
$$u = \sum_{k=1}^{N} u_k.$$
Quindi, basta dimostrare che il teorema di approssimazione vale per le funzioni u_k. Fissato $t > 0$ abbastanza piccolo, osserviamo che la funzione
$$u_k^t(x) = u_k^t(x', x_d) = u_k(x', x_d - t)$$
sia in $W^{1,p}(\Omega)$ e che
$$u_k = \lim_{t \to 0} u_k^t$$
fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$. Ora, siccome u_k^t è una funzione in $W^{1,p}$ di un aperto che contiene strettamente $\overline{\Omega}$, abbiamo che u_k^t è approssimabile in $W^{1,p}(\Omega)$ con funzioni C^∞. Quindi, anche u_k lo è. $\square$

Teorema di estensione per funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$

Lemma 3. *Sia D un aperto e limitato in $\mathbb{R}^d$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto di classe C^1. Siano $\varphi : D\cap\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $\psi : D \setminus \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1, limitate con gradienti limitati, tali che*

$$\varphi \equiv \psi \quad su \quad D \cap \partial\Omega.$$

Allora, per ogni $p \in [1, +\infty]$, la funzione

$$u : D \to \mathbb{R} \ , \qquad u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & se \quad x \in D \cap \overline{\Omega}, \\ \psi(x) & se \quad x \in D \setminus \Omega, \end{cases}$$

$$\nabla u(x) = \begin{cases} \nabla\varphi(x) & se \quad x \in D \cap \Omega, \\ \nabla\psi(x) & se \quad x \in D \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Teorema 4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e limitato di classe C^1. Sia $p \in (1, +\infty)$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una funzione $\widetilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ con le proprietà seguenti:*

- *$\widetilde{u} \equiv u$ in Ω;*
- *$\|\nabla\widetilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\Big(\|u\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u\|_{L^p(B_R)}\Big)$, dove C è una costante che dipende solo da d, p e Ω.*

Dimostrazione. Osserviamo che per il teorema di approssimazione basta dimostrare il teorema per funzioni $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Consideriamo di nuovo la partizione dell'unità di Ω data delle funzioni ϕ_k, $k = 1, \dots, N$. Per ogni k, definiamo $u_k := \phi_k u$. Allora, $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$u = \sum_{k=1}^{N} u_k.$$

Inoltre,

$$\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \le \|\phi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L^p(\Omega)} \,,$$
$$\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} \le \|\phi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla\phi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L^p(\Omega)} \,.$$

Quindi, basta dimostrare che per ogni k esiste $\widetilde{u}_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ tale che

- $\widetilde{u}_k \equiv u_k$ in Ω;
- $\|\nabla\widetilde{u}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\Big(\|u_k\|_{L^p(B_R)} + \|\nabla u_k\|_{L^p(B_R)}\Big)$.

Infatti, basta prendere

$$\widetilde{u}_k(x', x_d) = \begin{cases} u_k(x', x_d) & \text{se} \quad x_d \ge \eta_k(x'), \\ u_k(x', 2\eta_k(x') - x_d) & \text{se} \quad x_d \le \eta_k(x'). \end{cases}$$

□

L'inclusione compatta di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$

Teorema 5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto, limitato e di classe C^1 e sia $p \in (1, +\infty)$.*
Data una successione $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, limitata in $W^{1,p}(\Omega)$, esistono una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che

$$u_{n_k} \to u \quad fortemente\ in \quad L^p(\Omega).$$