Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger su insiemi regolari

Teorema 1. *Sia* $\Omega \in \mathbb{R}^d$ *un insieme aperto, limitato, connesso e di classe* C^1*. Allora, per ogni* $p \in (1, +\infty)$*, esiste una costante* $C = C(p, d, \Omega)$ *tale che per ogni* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega \big|u(x) - M_\Omega\big|^2\,dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \qquad \textit{dove} \qquad M_\Omega := \fint_\Omega u(x)\,dx\ .$$

Dimostrazione. Definiamo

$$m := \inf\Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \ : \ \int_\Omega u(x)\,dx = 0\,,\ \int_\Omega |u(x)|^p\,dx = 1\,,\ u \in W^{1,p}(\Omega)\Big\}.$$

Dimostreremo che

$$m > 0.$$

Supponiamo per assurdo che $m = 0$. Allora, esiste una successione

$$\int_\Omega u_n(x)\,dx = 0\ , \quad \int_\Omega |u_n(x)|^p\,dx = 1\ , \quad u_n \in W^{1,p}(\Omega)\,,$$

tale che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx = 0\,.$$

In particolare, la successione u_n è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Siccome Ω è un aperto limitato di classe C^1, esistono $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che

$$u_{n_k} \to u \quad \text{fortemente in} \quad L^p(\Omega)\ , \qquad u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{debolmente in} \quad W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Quindi,

$$\int_\Omega u(x)\,dx = 0\ , \quad \int_\Omega |u(x)|^p\,dx = 1\ , \quad u \in W^{1,p}(\Omega)\,,$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \le \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2\,dx = 0\,.$$

Allora, siccome Ω è connesso, abbiamo che u è costante, ma questo è un assurdo. □