Teorema di Rellich in domini illimitati

Lemma 1. *Sia $p \in (1,+\infty)$. Allora, per ogni $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, si ha*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\frac{pd}{d-1}}\,dx\right)^{\frac{d-1}{d}} \le p\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dimostrazione. Sia $\alpha > 1$. Allora

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{\frac{\alpha d}{d-1}}\,dx\right)^{\frac{d-1}{d}} &\le \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla(\varphi^\alpha)|\,dx\\ &= \alpha\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi|^{\alpha-1}|\nabla\varphi|\,dx\\ &\le \alpha\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi|^{\frac{p}{p-1}(\alpha-1)}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Prendendo $p = d$, abbiamo la tesi. □

Teorema 2. *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e $p \in (1,+\infty)$. Se u_n è una successione limitata di $W_0^{1,p}(\Omega)$, allora esistono una funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ed una sottosuccessione u_{n_k} tali che:*

- *u_{n_k} converge a u debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$;*
- *u_{n_k} converge a u fortmente in $L^p(\Omega)$;*
- *$u_{n_k}(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \Omega$.*

Dimostrazione. Sia $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ tale che:

$$\phi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_2\,, \qquad \phi = 1 \quad \text{in} \quad B_1\,, \qquad 0 \le \phi \le 1 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d\,.$$

Poniamo

$$\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = L\,.$$

Per ogni $R > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_R(x) = \phi\big(x/R\big).$$

Allora,

$$\phi_R = 1 \quad \text{in} \quad B_R\,, \qquad 0 \le \phi_R \le 1 \quad \text{in} \quad B_{2R}\setminus B_R\,, \qquad \phi_R = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d\setminus B_{2R}\,, \qquad \|\nabla\phi_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \le \frac{L}{R}\,.$$

Ora stimiamo la norma $\|u_n - \phi_R u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

$$\begin{aligned}\|u_n - \phi_R u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \int_{\Omega\setminus B_R}|u_n|^p\,dx &\le |\Omega\setminus B_R|^{1/d}\left(\int_{\Omega\setminus B_R}|u_n|^{\frac{pd}{d-1}}\,dx\right)^{\frac{d-1}{d}}\\ &\le |\Omega\setminus B_R|^{1/d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_n|^{\frac{pd}{d-1}}\,dx\right)^{\frac{d-1}{d}}\\ &\le |\Omega\setminus B_R|^{1/d}p\left(\int_{\mathbb{R}^d}|u_n|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u_n|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Ora, siccome la successione $\phi_R u_n$, $n \ge 1$, è limitata per ogni $R > 1$, applichiamo il teorema di Rellich per domini limitati e otteniamo che per ogni R possiamo estrarre una successione convergente. La tesi segue da un argomento di successione diagonale. □

Corollario 3 (Esistenza di soluzioni in domini illimitati)**.** *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$