Convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$

Lo spazio duale di $W^{1,p}(I)$

Siano $p \in [1, +\infty]$ e $q := \frac{p}{p-1}$. Date una funzioni $\varphi \in L^q(\Omega)$ ed un vettore $\Psi \in \big(L^q(\Omega)\big)^d$, definiamo:

$$T(u) := \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \Psi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Allora

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}\,,$$

è un funzionale lineare continuo su $W^{1,p}(\Omega)$. Quando $p \in (1, +\infty)$ vale anche il viceversa.

Teorema 1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $p \in (1, +\infty)$. Dato un funzionale lineare continuo*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}\,,$$

esistono una funzioni $\varphi \in L^q(\Omega)$ ed un campo vettoriale $\Psi \in \big(L^q(\Omega)\big)^d$, con $q := \frac{p}{p-1}$, tali che:

$$T(u) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \Psi(x)\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema di Hahn-Banach, T può essere esteso ad un funzionale lineare continuo su $\big(L^p(\Omega)\big)^{d+1}$. La conclusione segue dal fatto che il duale di $L^p(\Omega)$ sia esattamente $L^q(\Omega)$. □

Convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$

Teorema 2. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $p \in (1, +\infty)$. Data una successione $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$, sono equivalenti:*

(1) *u_n converge debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ ad una qualche funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$;*

(2) *esiste $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$ ed $\partial_j u_n \rightharpoonup \partial_j u$ debolmente in $L^p(I)$ per ogni $j = 1, \dots, d$;*

(3) *u_n converge debolmente in $L^p(\Omega)$ ad una qualche funzione $u \in L^p(\Omega)$ e per ogni $j = 1, \dots, d$ la successione $\partial_j u_n$ converge debolmente in $L^p(\Omega)$ ad una qualche funzione $v_j \in L^p(\Omega)$.*

Corollario 3. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $p \in (1, +\infty)$. Ogni successione limitata $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Corollario 4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $p \in (1, +\infty)$. Se $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ converge debolmente ad $u \in W^{1,p}(\Omega)$, allora u_n è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e si ha:*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n(x)|^p\,dx \qquad e \qquad \int_\Omega |u(x)|^p\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x)|^p\,dx\,.$$