Traslazioni e teorema di Rellich

Traslazioni di funzioni di Sobolev

Lemma 1. *Siano $p \in (1, +\infty)$ e $d \geq 2$. Allora, per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed ogni $y \in \mathbb{R}^d$, si ha*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x} \leq |y| \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Dimostrazione. Data una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, con $p \in (1, +\infty]$ abbiamo che

$$\|f\|_{L^p} = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x)\,dx \ : \ \psi \in L^q(\mathbb{R}^d), \ \|\psi\|_{L^q} = 1 \Big\}.$$

Siccome, per $q \in [1, +\infty)$, abbiamo che $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ è denso in $L^q(\mathbb{R}^d)$, otteniamo

$$\|f\|_{L^p} = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\psi(x)\,dx \ : \ \psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d), \ \|\psi\|_{L^q} = 1 \Big\}.$$

In particolare,

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x} = \sup\Big\{ \int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x+y) - u(x)\big)\psi(x)\,dx \ : \ \psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d), \ \|\psi\|_{L^q} = 1 \Big\}.$$

Prendendo una funzione $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ e tale che $\|\psi\|_{L^q} = 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x+y) - u(x)\big)\psi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\big(\psi(x-y) - \psi(x)\big)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\bigg(\int_0^1 (-y)\cdot\nabla\psi(x-ty)\,dt\bigg)\,dx \\
&= -\sum_{j=1}^{d} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} y_j u(x)\partial_j\psi(x-ty)\,dx\,dt \\
&= \sum_{j=1}^{d} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} y_j \partial_j u(x)\psi(x-ty)\,dx\,dt \leq \sum_{j=1}^{d} |y_j|\|\partial_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Una caratterizzazione dello spazio $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Teorema 2. *Siano $p \in (1, +\infty)$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Allora, sono equivalenti:*

(1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;

(2) *esiste una costante $C > 0$ tale che*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x} \leq C\,|y| \qquad \textit{per ogni} \qquad y \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. L'implicazione (1) $\Rightarrow$ (2) segue dal lemma precedente. Dimostriamo (2) $\Rightarrow$ (1). Per ogni funzione $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ abbiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\big(u(x+y) - u(x)\big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \big(\psi(x-y) - \psi(x)\big)u(x)\,dx\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j\psi(x)u(x)\,dx &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\psi(x+te_j)-\psi(x)}{t}u(x)\,dx\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x)\big(u(x-te_j)-u(x)\big)\,dx\\ &\le \|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\left\|\frac{u(x-te_j)-u(x)}{t}\right\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)}\\ &\le C\|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Quindi, il funzionale

$$T : L^q(\mathbb{R}^d)\cap C_c^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}\ ,\qquad T(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d}\partial_j\psi(x)u(x)\,dx\,,$$

è un funzionale lineare limitato su $L^q(\mathbb{R}^d)\cap C_c^1(\mathbb{R}^d)$. Quindi, può essere esteso ad un funzionale lineare limitato

$$\widetilde{T} : L^q(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}\quad \text{tale che}\quad \widetilde{T}\equiv T\quad \text{su}\quad L^q(\mathbb{R}^d)\cap C_c^1(\mathbb{R}^d)\,.$$

In particolare, esiste una funzione $v_j \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d}\partial_j\psi(x)u(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} v_j(x)\psi(x)\,dx\quad \text{per ogni}\quad \psi\in C_c^1(\mathbb{R}^d). \qquad \square$$

Traslazioni e convoluzioni in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

Proposizione 3. *Siano $p \in (1,+\infty)$ e $d \ge 2$. Allora, esiste una costante*

$$C = C(d,p) > 0\,,$$

tale che per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

$$\|u*\phi_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C\varepsilon\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,,$$

dove $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d}\phi_\varepsilon(x)\,dx \le 1\ ,\qquad \phi_\varepsilon \ge 0\quad su\quad \mathbb{R}^d\qquad e\qquad \phi_\varepsilon\equiv 0\quad in\quad \mathbb{R}^d\setminus B_\varepsilon\,.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\big|(u*\phi_\varepsilon)(x)-u(x)\big|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}u(x-y)\phi_\varepsilon(y)\,dy - u(x)\right|^p dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Big(u(x-y)-u(x)\Big)\phi_\varepsilon(y)\,dy\right|^p dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|u(x-y)-u(x)\Big|^p\phi_\varepsilon(y)\,dy\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|u(x-y)-u(x)\Big|^p\,dx\,\phi_\varepsilon(y)\,dy \le C\varepsilon^p\|\nabla u\|_{L^p}^p. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema di Rellich

Teorema 4. *Siano $p \in (1, +\infty)$ e B_R una palla in $\mathbb{R}^d$. Sia u_n una successione limitata di $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e tale che, per ogni $n \geq 1$,*

$$u_n \equiv 0 \quad in \quad \mathbb{R}^d \setminus B_R .$$

Allora esistono una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed una sottosuccessione di u_{n_k} tali che:

- *u_{n_k} converge a u debolmente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$;*
- *u_{n_k} converge a u fortemente in $L^p(\mathbb{R}^d)$;*
- *$u_{n_k}(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, consideriamo la successione $u_n * \phi_\varepsilon$.
Se $\Omega \subset B_R$ e $\varepsilon < R$, allora $u_n * \phi_\varepsilon$ è una funzione C^∞ con supporto contenuto in B_{2R}. Inoltre,

$$\|u_n * \phi_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|u_n\|_{L^p},$$

$$\|\nabla(u_n * \phi_\varepsilon)\|_{L^p} = \|(\nabla u_n) * \phi_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|\nabla u_n\|_{L^p},$$

e quindi $u_n * \phi_\varepsilon$ è limitata in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. D'altra parte,

$$\|u_n * \phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|u_n\|_{L^p} \|\phi_\varepsilon\|_{L^q}.$$

$$\|\nabla(u_n * \phi_\varepsilon)\|_{L^\infty} = \|u_n * (\nabla \phi_\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq \|u_n\|_{L^p} \|\nabla \phi_\varepsilon\|_{L^q}.$$

In particolare, la successione $u_n * \phi_\varepsilon$ è equicontinua ed equilimitata in B_{2R}. Possiamo quindi estrarre una sottosuccessione di Cauchy in L^∞ (e quindi anche in $L^p(B_{2R})$) tale che

$$\|u_n * \phi_\varepsilon - u_m * \phi_\varepsilon\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

per ogni m, n. Ora, usando la stima

$$\|u_n * \phi_\varepsilon - u_n\|_{L^p} \leq \varepsilon \|\nabla u_n\|_{L^p},$$

la disuguaglianza triangolare ed il fatto che

$$\|\nabla u_n\|_{L^p} \leq C \quad \text{per ogni} \quad n \geq 1 ,$$

per una costante universale C (che non dipende da n), otteniamo che

$$\|u_n - u_m\|_{L^p} \leq (1 + 2C)\varepsilon.$$

Ora, estraendo una successione diagonale, otteniamo una sottosuccessione di Cauchy in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e limitata in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Da questa possiamo estrarre una successione di u_n che converge debolmente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ ed un'altra sottosuccessione che converge puntualmente quasi-ovunque. □