Gli spazi $W_0^{1,p}$

Definizione

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Definiamo lo spazio di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ come la chiusura delle funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $W^{1,p}$. Siccome, abbiamo che allo stesso tempo

$$C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad C_c^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)\,,$$

otteniamo che valgono le inclusioni

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad W_0^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)\,.$$

In particolare, per ogni funzione $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha che

$$u = 0 \quad \text{quasi-ovunque in} \quad \mathbb{R}^d \setminus \Omega.$$

Infine, osserviamo che siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, abbiamo che

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W^{1,p}(\mathbb{R}^d).$$

Esempi

Esempio 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty)$. Dato $\delta > 0$, definiamo*

$$\Omega_\delta := \Big\{ x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \delta \Big\}.$$

Se la funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è tale che

$$u = 0 \quad \textit{quasi-ovunque su} \quad \Omega \setminus \Omega_\delta\,,$$

allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Infatti, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, le convoluzioni $u*\phi_\varepsilon$ hanno supporto compatto in Ω e convergono fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ alla funzione u.

Esempio 2. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, con $d \geq 2$, e $p \in [1, d)$.* **Non è vero** *che se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora $u = 0$ su $\partial\Omega$. Infatti, consideriamo l'insieme*

$$\Omega := B_1 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^d\,.$$

Allora,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(B_1).$$

Prendiamo una funzione $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ tale che $\varphi \equiv 1$ on $B_{1/2}$ e consideriamo i riscalamenti

$$\phi_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon).$$

Per ogni funzione $u \in C_c^\infty(B_1)$ consideriamo la famiglia di funzioni

$$u(1 - \phi_\varepsilon) \in C_c^\infty(B_1 \setminus \{0\}).$$

Per il teorema della convergenza dominata, abbiamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(1 - \phi_\varepsilon) = u$$

fortemente in $L^p(\Omega)$. *D'altra parte*

$$\begin{aligned}\|\nabla(u(1-\phi_\varepsilon)) - \nabla u\|_{L^p} &= \|(1-\phi_\varepsilon)\nabla u - \nabla\phi_\varepsilon u - \nabla u\|_{L^p} \\ &\le \|\phi_\varepsilon \nabla u\|_{L^p} + \|u\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^p}\,.\end{aligned}$$

Ora, osserviamo che per il teorema della convergenza dominata

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\phi_\varepsilon\nabla u\|_{L^p} = 0\,.$$

Per studiare la convergenza di $\|u\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^p}$, *calcoliamo*

$$\nabla\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\varphi(x/\varepsilon).$$

Quindi

$$\|\nabla\phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}\,.$$

Ora, siccome

$$\int_{\mathbb{R}^d}|u\nabla\phi_\varepsilon|^p\,dx = \int_{B_\varepsilon}|u\nabla\phi_\varepsilon|^p\,dx \le \frac{|B_\varepsilon|}{\varepsilon^p}\|u\|_{L^\infty}^p\|\nabla\varphi\|_{L^\infty}^p\,.$$

Quindi,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\nabla(u(1-\phi_\varepsilon)) - \nabla u\|_{L^p} = 0\,,$$

e quindi

$$C_c^\infty(B_1) \subset W_0^{1,p}(B_1\setminus\{0\}).$$

In particolare, questo implica che

$$W_0^{1,p}(B_1) \subset W_0^{1,p}(B_1\setminus\{0\})\,,$$

il che conclude la dimostrazione.

Convergenza debole in $W_0^{1,p}(\Omega)$

Proposizione 3. *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$ *e* $p\in[1,+\infty)$. *Sia* $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ *una successione che converge debolmente in* $W^{1,p}(\Omega)$ *ad una funzione* $u\in W^{1,p}(\Omega)$. *Se*

$$u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{per ogni} \quad n\ge 1\,,$$

allora $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Analogamente, abbiamo

Proposizione 4. *Siano* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^d$ *e* $p\in[1,+\infty)$. *Sia* $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *una successione che converge debolmente in* $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ *ad una funzione* $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. *Se*

$$u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{per ogni} \quad n\ge 1\,,$$

allora $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema di Rellich in domini limitati

Teorema 5. *Siano* Ω *un aperto limitato in* $\mathbb{R}^d$ *e* $p\in[1,+\infty)$. *Se* u_n *è una successione limitata di* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *allora esistono una funzione* $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ *ed una sottosuccessione* u_{n_k} *tali che:*

- $u_{n_k} \rightharpoonup u$ *debolmente in* $W^{1,p}$;
- $u_{n_k} \to u$ *fortemente in* L^p;
- $u_{n_k}(x) \to u(x)$ *per quasi-ogni* $x \in \mathbb{R}^d$.

Disuguaglianza di Poincaré

Teorema 6 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** *Siano* Ω *un aperto limitato in* $\mathbb{R}^d$ *e* $p \in [1, +\infty)$. *Allora,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \operatorname{diam}(\Omega) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,$$

dove la costante C *dipende solo da* d *e* p.

Dimostrazione. Usare la disuguaglianza $\quad \|u(x+y) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)} \leq C\,|y|\,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$. $\square$

Corollario 7. *Sia* Ω *un aperto limitato in* $\mathbb{R}^d$ *e sia* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Se* $\nabla u \equiv 0$ *in* Ω, *allora* $u \equiv 0$ *in* Ω.

Bibliografia

[B] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer-Verlag New York (2011).