Definizione puntuale di una funzione di Sobolev - il caso $p = d$

Una famiglia di funzioni in $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$

Lemma 1. *Sia $d \geq 2$. Per ogni $\delta > 0$, definiamo la funzione*

$$\phi_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| > 1; \\ 0 & \text{se} \quad |x| < \delta; \\ \dfrac{\ln |x|}{\ln \delta} & \text{se} \quad \delta \leq |x| \leq 1. \end{cases}$$

Allora, $\phi_\delta \in W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ e

$$\lim_{\delta \to 0} \|\phi_\delta\|_{W^{1,d}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni δ fissato la funzione ϕ_δ è in $W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ e che il suo gradiente debole è dato da

$$\nabla\phi_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |x| > 1; \\ 0 & \text{se} \quad |x| < \delta; \\ \dfrac{1}{\ln \delta}\dfrac{x}{|x|^2} & \text{se} \quad \delta < |x| < 1. \end{cases}$$

In particolare

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\phi_\delta(x)|^d \, dx = d\omega_d \int_\delta^1 r^{d-1} \frac{1}{|\ln \delta|^d} \frac{1}{r^d} \, dr = \frac{d\omega_d}{|\ln \delta|^d} \int_\delta^1 \frac{1}{r} \, dr = \frac{d\omega_d}{|\ln \delta|^{d-1}}.$$

Ora, siccome il supporto delle funzioni ϕ_δ è contenuto in B_2, abbiamo che $\phi_\delta \in W_0^{1,d}(B_2)$ (in realtà, è vero anche che $\phi_\delta \in W_0^{1,d}(B_1)$). Di conseguenza, per la disuguaglianza di Poincaré,

$$\|\phi_\delta\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} = \|\phi_\delta\|_{L^d(B_2)} \leq C_d \|\nabla\phi_\delta\|_{L^d(B_2)} = \frac{C_d}{|\ln \delta|^{d-1}}.$$

In conclusione, siccome $\lim_{\delta \to 0} \dfrac{1}{|\ln \delta|} = 0$, abbiamo la tesi. □

Due corollari

Corollario 2. *Sia $d \geq 2$. Allora, esiste una successione $u_n \in C(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,d}(\mathbb{R}^d)$ tale che*

- $u_n(0) = 1$ *per ogni* $n \geq 1$;
- $\lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_{W^{1,d}(\mathbb{R}^d)} = 0.$

Dimostrazione. Basta prendere $u_n(x) = \phi_{1/n}(x)$. □

Corollario 3. *Sia B_1 la palla di raggio 1 in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Allora, $W_0^{1,d}(B_1 \setminus \{0\}) = W_0^{1,d}(B_1)$.*

Dimostrazione. Per definizione, abbiamo che

$$W_0^{1,d}(B_1 \setminus \{0\}) \subset W_0^{1,d}(B_1)\,.$$

Quindi, basta dimpstrare l'inclusione opposta.

Data una funzione

$$u \in C_c^\infty(B_1),$$

consideriamo la famiglia di funzioni

$$u(1-\phi_\delta).$$

Per costruzione

$$u(1-\phi_\delta) \in C(\overline{B}_1) \cap W^{1,d}(B_1).$$

Inoltre, il supporto di $u(1-\phi_\delta)$ è contenuto in $B_1 \setminus \{0\}$. Quindi,

$$u(1-\phi_\delta) \in W_0^{1,d}(B_1 \setminus \{0\}).$$

Abbiamo che:

$$\|\phi_\delta u\|_{L^d} \leq \|u\|_{L^\infty} \|\phi_\delta\|_{L^d}\,;$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\phi_\delta u)\|_{L^d} &= \|\phi_\delta \nabla u + u \nabla \phi_\delta\|_{L^d} \\
&\leq \|\phi_\delta \nabla u\|_{L^d} + \|u \nabla \phi_\delta\|_{L^d} \\
&\leq \|u\|_{L^\infty} \|\nabla \phi_\delta\|_{L^d} + \|\nabla u\|_{L^\infty} \|\phi_\delta\|_{L^d}\,.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{\delta \to 0} u(1-\phi_\delta) = u \qquad \text{fortemente in} \qquad W^{1,d}(B_1).$$

e di conseguenza

$$C_c^\infty(B_1) \subset W_0^{1,d}(B_1 \setminus \{0\}).$$

In particolare, per la definizione di $W_0^{1,d}(B_1)$,

$$W_0^{1,d}(B_1) \subset W_0^{1,d}(B_1 \setminus \{0\})\,,$$

il che conclude la dimostrazione. □