Aperti, chiusi, connessi, compatti

Esercizio 1. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $B_2(1,0) \cup B_2(-1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 2. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2(1,0) \cup B_2(-1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 3. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2(1,0) \cup \overline{B}_2(-1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 4. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $B_2(0,0) \setminus \Big\{(x,y) \ : \ y=0,\ x \geq 0\Big\}$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 5. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $B_2(0,0) \setminus \Big\{(x,y) \ : \ y=0,\ x > 0\Big\}$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 6. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2(0,0) \setminus \Big\{(x,y) \ : \ y=0,\ x > 0\Big\}$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 7. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2(0,0) \setminus \Big\{(x,y) \ : \ y=0,\ x > 0\Big\}$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*

(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 8. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $[1,3]\times[2,4)$ *è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$*;*
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$*;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 9. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $[1,3]\times[2,4]$ *è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$*;*
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$*;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 10. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $[1,3]\times(2,4)$ *è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$*;*
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$*;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 11. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $(1,3]\times(2,4)$ *è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$*;*
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$*;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 12. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $(1,3)\times(2,4)$ *è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$*;*
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$*;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 13. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $B_2\setminus B_1(1,0)$ *è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 14. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2 \setminus B_1(1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 15. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $B_2 \setminus \overline{B}_1(1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 16. *In* $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* $\overline{B}_2 \setminus \overline{B}_1(1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 17. *Siano* f *e* g *le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2 - x^2$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 18. *Siano* f *e* g *le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 2 - x^2$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 19. *Siano* f *e* g *le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -(x+1)^2 - 2$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x < 4, \ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 20. *Siano f e g le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -(x+1)^2 - 2$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 4,\ f(x) \leq y \leq g(x) \Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 21. *Siano f e g le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -(x+1)^2 - 2$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x < 4,\ f(x) \leq y \leq g(x) \Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 22. *Siano f e g le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = -(x+1)^2 - 2$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 4,\ f(x) < y < g(x) \Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 23. *Indicare gli insiemi compatti*

(a) B_1;
(b) $\overline{B}_1$;
(c) ∂B_2;
(d) $B_2 \setminus B_1$;
(e) $\overline{B}_2 \setminus B_1$.

Esercizio 24. *Indicare gli insiemi compatti*

(a) $B_1 \setminus \{0\}$;
(b) $\overline{B}_1 \setminus \{0\}$;

(c) $\overline{B}_1$;
(d) $\overline{B}_1 \cup \{(3,0)\}$;
(e) $\overline{B}_1 \cup \{(x,0) \ : \ 1 \le x \le 5\}$.

Esercizio 25. *Indicare gli insiemi aperti*
(a) $B_1 \setminus \{0\}$;
(b) $\overline{B}_1 \setminus \{0\}$;
(c) $\overline{B}_1$;
(d) $\overline{B}_1 \cup \{(3,0)\}$;
(e) $\overline{B}_1 \cup \{(x,0) \ : \ 1 \le x \le 5\}$.

Esercizio 26. *Se A e B sono due aperti, allora*
(a) $A \cap B$ *è aperto;*
(b) $A \cup B$ *è aperto;*
(c) $A \setminus B$ *è aperto;*
(d) $A \setminus \overline{B}$ *è aperto;*
(e) $\overline{A} \cap \overline{B}$ *è chiuso.*

Esercizio 27. *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto. Allora:*
(a) *ogni successione in K è limitata;*
(b) *ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente;*
(c) *ogni successione in K è convergente;*
(d) *ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito;*
(e) *ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento di n isiemi.*

Esercizio 28. *Quali fra le affermazioni seguenti sono corrette ?*
(a) *Unione finita di compatti è un compatto.*
(b) *Unione infinita di compatti è un compatto.*
(c) *Unione finita di aperti è un aperto.*
(d) *Unione infinita di aperti è un aperto.*

Esercizio 29. *Quali fra le affermazioni seguenti sono corrette ?*
(a) *Intersezione finita di compatti è un compatto.*
(b) *Intersezione infinita di compatti è un compatto.*
(c) *Intersezione finita di aperti è un aperto.*
(d) *Intersezione infinita di aperti è un aperto.*

Esercizio 30. *In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $B_2 \setminus \{(1,0)\}$ è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a $(0,0)$;*
(f) *stellato rispetto a $(1,3)$;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 31. *In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $B_2 \setminus B_1$ è*
(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a $(0,0)$;*
(f) *stellato rispetto a $(1,3)$;*
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 32. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $B_2 \setminus \overline{B}_1$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$;
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$;
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 33. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $B_2 \setminus B_{1/2}(1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$;
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$;
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 34. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $B_2 \setminus \overline{B}_{1/2}(1,0)$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$;
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$;
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 35. *In* $\mathbb{R}^2$, *l'insieme* $B_2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$;
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$;
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 36. *Sia* K *un insieme finito (costituito da un numero finito di punti) in* $\mathbb{R}^2$. *Allora,* $B_2 \setminus K$ *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$;
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$;
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 37. *Sia* K *un insieme finito (costituito da un numero finito di punti) in* $\mathbb{R}^2$. *Allora, l'insieme* K *è*

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *stellato rispetto a* $(0,0)$;
(f) *stellato rispetto a* $(1,3)$;
(g) *connesso per archi.*

Esercizio 38. *Siano f e g le funzioni*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^x \qquad\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=e^{2x}$$

e sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ f(x)<y<g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 39. *Siano f e g le funzioni*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^x \qquad\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=e^{2x}$$

e sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ f(x)\le y\le g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 40. *Siano f e g le funzioni*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin x \qquad\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\sin -x$$

e sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ f(x)<y<g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 41. *Siano f e g le funzioni*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin x \qquad\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\sin -x$$

e sia $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ f(x)\le y\le g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$, l'insieme Ω è

(a) *aperto;*
(b) *chiuso;*
(c) *compatto;*
(d) *connesso;*
(e) *connesso per archi.*

Esercizio 42. *Siano f e g le funzioni*

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sin x \qquad\qquad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=e^x$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*
- *(a) aperto;*
- *(b) chiuso;*
- *(c) compatto;*
- *(d) connesso;*
- *(e) connesso per archi.*

Esercizio 43. *Siano* f *e* g *le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x}$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \le y \le g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*
- *(a) aperto;*
- *(b) chiuso;*
- *(c) compatto;*
- *(d) connesso;*
- *(e) connesso per archi.*

Esercizio 44. *Siano* f *e* g *le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tfrac{1}{1000}x^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos x$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*
- *(a) aperto;*
- *(b) chiuso;*
- *(c) compatto;*
- *(d) connesso;*
- *(e) connesso per archi.*

Esercizio 45. *Siano* f *e* g *le funzioni*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos x$$

e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x)\Big\}.$$

In $\mathbb{R}^2$*, l'insieme* Ω *è*
- *(a) aperto;*
- *(b) chiuso;*
- *(c) compatto;*
- *(d) connesso;*
- *(e) connesso per archi.*

Esercizio 46 (Esercizio teorico che potrebbe tornare utile)**.** *Siano* f *e* g *due funzioni derivabili in* (a,b) *e continue su* $[a,b]$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad g : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Dimostrare che esiste $c \in (a,b)$ *tale che* $f'(c) = g'(c)$*. In particolare, se i grafici delle due funzioni* f *e* g *si intersecano* n *volte, ci sono (almeno)* $n-1$ *soluzioni distinti delll'equazione* $f'(x) = g'(x)$*.*

Chiusura, parte interna e bordo

Esercizio 47. *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue. Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y \leq g(x)\Big\}.$$

Allora, la chiusura di Ω *è :*

(a) $\overline{\Omega} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y \leq g(x)\Big\}$.
(b) $\overline{\Omega} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x)\Big\}$.
(c) $\overline{\Omega} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}$.
(d) $\overline{\Omega} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y < g(x)\Big\}$.

Esercizio 48. *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue. Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y \leq g(x)\Big\}.$$

Allora, la parte interna di Ω *è :*

(a) $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y \leq g(x)\Big\}$.
(b) $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y < g(x)\Big\}$.
(c) $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y \leq g(x)\Big\}$.
(d) $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y < g(x)\Big\}$.

Esercizio 49. *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue. Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) < y \leq g(x)\Big\}.$$

Allora, il bordo di Ω *è :*

(a) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x) = y\Big\}$.
(b) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = y\Big\}$.
(c) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = y\Big\} \ \bigcup \ \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x) = y\Big\}$
(d) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = y\Big\} \ \bigcap \ \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x) = y\Big\}$
(e) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y\Big\} \ \bigcup \ \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x) \leq y\Big\}$
(f) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y\Big\} \ \bigcap \ \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x) \leq y\Big\}$

Esercizio 50. *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *l'insieme*

$$\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > f(x), \ x > 1\Big\}.$$

Allora, il bordo di Ω *è :*

(a) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = y\Big\}$.
(b) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = y, \ x \geq 1\Big\}$.
(c) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq f(x), \ x \geq 1\Big\}$.
(d) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq f(x), \ x = 1\Big\}$.
(e) $\partial\Omega = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) = y, \ x \geq 1\Big\} \ \bigcap \ \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq f(x), \ x = 1\Big\}$.

Esercizio 51. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una funzione continua e siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *un insieme aperto e* $K \subset \mathbb{R}^d$ *un compatto. Selezionare le affermazioni corrette :*

(a) $f(\Omega)$ *è aperto;*
(b) $f^{-1}(\Omega)$ *è aperto;*
(c) $f(K)$ *è compatto;*
(d) $f^{-1}(K)$ *è compatto.*

Esercizio 52. *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una funzione continua. Selezionare le affermazioni corrette :*

(a) Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f(\Omega)$ *è aperto;*
(b) Per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(\Omega)$ *è aperto;*
(c) Per ogni aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f(\Omega)$ *è connesso.*
(d) Per ogni aperto connesso$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f^{-1}(\Omega)$ *è connesso.*

Esercizio 53. *Siano* A *e* B *due insiemi in* $\mathbb{R}^2$*. Selezionare le affermazioni corrette :*

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$*;*
(b) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$*;*
(c) $\partial(A \cup B) = \partial A \cap \partial B$*;*
(d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$*;*
(e) $\partial(A \cap B) = \partial A \cup \partial B$*;*
(f) $\partial(A \cap B) = \partial A \cap \partial B$*.*

Esercizio 54. *Sia* B_1 *la palla di raggio* 1 *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Sia* Ω *l'insieme* $B_1 \setminus \{(0,0)\}$*.*
Con $\operatorname{int}(\Omega)$ *indicheremo la parte interna di* Ω*.*
Selezionare le affermazioni corrette :

(a) $\overline{\Omega} = \overline{B}_1$
(b) $\operatorname{int}(\Omega) = \operatorname{int}(B_1)$
(c) $\partial\Omega = \partial B_1$
(d) $\overline{\Omega} = \overline{B}_1 \setminus \{(0,0)\}$
(e) $\operatorname{int}(\Omega) = \operatorname{int}\big(B_1 \setminus \{(0,0)\}\big)$
(f) $\partial\Omega = \partial B_1 \setminus \{(0,0)\}$
(g) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(0,0)\}$

Esercizio 55. *Sia* B_2 *la palla di raggio* 2 *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Sia* Ω *l'insieme* $B_2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$*.*
Con $\operatorname{int}(\Omega)$ *indicheremo la parte interna di* Ω*.*
Selezionare le affermazioni corrette :

(a) $\overline{\Omega} = \overline{B}_1$
(b) $\operatorname{int}(\Omega) = \operatorname{int}(B_1)$
(c) $\partial\Omega = \partial B_1$
(d) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(1,0)\}$
(e) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(-1,0)\}$
(f) $\partial\Omega = \partial B_1 \cup \{(1,0)\} \cup \{(-1,0)\}$

Esercizio 56. *Sia* B_2 *la palla di raggio* 2 *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Sia* Ω *l'insieme* $B_2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$*.*
Con $\operatorname{int}(\Omega)$ *indicheremo la parte interna di* Ω*.*
Selezionare le affermazioni corrette :

(a) $\overline{\operatorname{int}(\Omega)} = \overline{\Omega}$
(b) $\operatorname{int}(\overline{\Omega}) = \operatorname{int}(\Omega)$
(c) $\partial\big(\operatorname{int}(\overline{\Omega})\big) = \partial\Omega$
(d) $\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega$
(e) $\partial(\partial\Omega) = \partial\Omega$

Esercizio 57. *Sia* B_1 *la palla di raggio* 1 *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Sia* Ω *l'insieme* $B_1 \setminus \{(0,0)\}$*.*
Con $\operatorname{int}(\Omega)$ *indicheremo la parte interna di* Ω*.*
Selezionare le affermazioni corrette :

(a) $\overline{\operatorname{int}(\Omega)} = \overline{\Omega}$
(b) $\operatorname{int}(\overline{\Omega}) = \operatorname{int}(\Omega)$
(c) $\partial\big(\operatorname{int}(\overline{\Omega})\big) = \partial\Omega$
(d) $\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega$
(e) $\partial(\partial\Omega) = \partial\Omega$

Esercizio 58. *Sia* B_1 *la palla di raggio* 1 *e centro* $(0,0)$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Sia* Ω *l'insieme* $B_1 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$*.*
Con $\operatorname{int}(\Omega)$ *indicheremo la parte interna di* Ω*.*
Selezionare le affermazioni corrette :

(a) $\overline{\operatorname{int}(\Omega)} = \overline{\Omega}$
(b) $\operatorname{int}(\overline{\Omega}) = \operatorname{int}(\Omega)$
(c) $\partial\big(\operatorname{int}(\overline{\Omega})\big) = \partial\Omega$
(d) $\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega$
(e) $\partial(\partial\Omega) = \partial\Omega$