Equazioni Ellittiche - Domande per l'esame

Per tutte le domande, potete usare liberamente le varie proprietà delle funzioni di Sobolev. Per esempio che se u è Sobolev, allora anche u_+, u_-, $|u|$, $(u-t)_+$, $u \wedge t$ sono Sobolev; anche i vari teoremi di approssimazione, per esempio che una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ può essere approssimata con funzioni C^∞ della forma $\phi_\varepsilon * u$.

Alla fine di ogni domanda sono indicate le dispense da consultare.

All'esame vi sarà proposto uno dei seguenti argomenti:

- *De Giorgi (potete scegliere tra Domanda 1 e Domanda 3);*
- *Schauder (potete scegliere tra Domanda 4 e Domanda 5);*
- *Formula della media, stima del gradiente, principio del massimo (potete scegliere tra Domanda 2 e Domanda 6);*
- *Funzioni subarmoniche (potete scegliere tra Domanda 7 e Domanda 8).*

---

1. Limitatezza delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^p(\Omega)$, dove $p > \frac{d}{2}$. Allora la soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

è limitata e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_{d,p} \|f\|_{L^p} |\Omega|^{\frac{2p-d}{pd}}.$$

Teorema. *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\,, \qquad \int_\Omega u^2\,dx = 1.$$

Allora, $u \in L^\infty$ e si ha la stima

$$\|u\|_{L^\infty} \le C_d \lambda^{d/4},$$

dove C_d è una costante dimensionale.

2. Regolarità Hölder fino al bordo ed un'applicazione

Teorema. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che ha la stima di densita esterna, ovvero supponiamo che*

esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che

per ogni $x \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$\big|B_r(x) \cap \Omega\big| \leq (1-c)|B_r|.$$

Siano $f \in L^p(\Omega)$ con $p > \frac{d}{2}$ ed $u \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Allora, $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ che soddisfa la stima di densità esterna, ovvero tale che*

Esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che

per ogni $x \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$\big|B_r(x) \cap \Omega\big| \leq (1-c)|B_r|.$$

Allora

$$H_0^1(\Omega) = \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^d) \ : \ u = 0 \ \ \textit{Lebesgue quasi-ovunque su} \ \ \mathbb{R}^d \setminus \Omega \Big\}.$$

3. Teorema di De Giorgi

Teorema. *Sia* $u \in H^1(B_{2R})$ *una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad B_{2R}\ ,$$

dove la matrice (simmetrica, a coefficienti Lebesgue misurabili) A è tale che:

$$c_A\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C_A\,\mathrm{Id} \quad \textit{per ogni} \quad x \in B_{2R}\,.$$

Esiste una costante $\eta \in (0,1)$ *tale che, se*

$$\operatorname*{osc}_{B_{2R}} u \le 2,$$

allora

$$\operatorname*{osc}_{B_{R/2}} u \le 2-\eta.$$

In particolare, le soluzioni u di

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = 0 \quad \textit{in} \quad B_{2R}\ ,$$

sono funzioni Hölder continue in B_{2R}.

4. Teorema di Schauder – continuità Lipschitz delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

5. Teorema di Schauder – regolarità $C^{1,\alpha}$ delle soluzioni

Teorema. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Sia $u \in C^{0,1}(\Omega)$ una funzione lipschitziana ed una soluzione di*

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \textit{in} \quad \Omega,$$

dove:

- *A è una matrice simmetrica, uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, con coefficienti Hölder.*
- *$f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d$.*
- *$F \in C^{0,\alpha}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, per un qualche $\alpha > 0$.*

Allora, esiste $\alpha > 0$ tale che $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$.

Osservazione. *Per dimostrare la differenziabilità in zero, potete usare che $u(0) = 0$, $A(0) = Id$ e che u soddisfa la seguente condizione di quasi-minimalità*

$$\fint_{B_r} |\nabla(u-h)|^2\,dx \le Cr^\alpha\,,$$

dove h è l'estensione armonica di u in B_r.

Osservazione. *Potete scegliere quale delle dimostrazioni fare: la dimostrazione di Capitolo2.Parte4-5 oppure la dimostrazione con la disuguaglianza epiperimetrica Capitolo2.Parte7-8-9 (nel secondo caso potete dare per buoni i risultati riguardanti gli spazi di Sobolev sulla sfera; potrebbe an che essere utile l'enunciato della formula di Weiss che riporto qui sotto).*

Lemma (Formula di Weiss)**.** *Se $u \in H^1(B_R)$, allora*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_r,1) = \frac{d}{r}\big(W(z_r,1) - W(u_r,1)\big) + \frac{1}{r}\int_{\partial B_1} |x\cdot\nabla u_r - u_r|^2\,d\mathcal{H}^{d-1},$$

dove

$$W(u,R) = \frac{1}{R^d}\int_{B_R} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{R^{d+1}}\int_{\partial B_R} u^2\,, \qquad u_r(x) := \frac{u(rx)}{r} \qquad \textit{e} \qquad z_r(x) := |x|u_r\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

6. Regolarità fino al bordo delle funzioni armoniche

Teorema. *Sia* Ω *un aperto limitato in* $\mathbb{R}^d$. *Sia*

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R},$$

una funzione che soddisfa la bounded slope condition con costante $S > 0$ *e sia* $h \in H^1(\Omega)$ *la soluzione di*

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega\ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora,

$$|\nabla h| \leq C_d S \qquad su \qquad \Omega,$$

dove C_d *è una costante dimensionale. In particolare,* $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *è Lipschitziana.*

Teorema. *Sia* Ω *un rettangolo in* $\mathbb{R}^2$. *Esiste una funzione lipchitziana*

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

tale per cui la soluzione h *di*

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega\ , \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega,$$

è continua (hölderiana), ma non lipschitziana fino al bordo di Ω.

7. Funzioni subarmoniche I

7.1. **Definizioni equivalenti.**

Teorema. *Siano Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione Lebesgue misurabile. Allora sono equivalenti:*

(1) $\Delta u \geq 0$ *in senso delle distribuzioni, ovvero:*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \text{tale che} \quad \varphi \geq 0.$$

(2) *for every $x_0 \in \Omega$ la funzione*

$$M : \big(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\big) \to \mathbb{R} \ , \qquad M(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx$$

è crescente sull'intervallo $\big(0, \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)\big)$.

7.2. **Funzioni subarmoniche e funzioni olomorfe.**

Lemma. *Mostrare che la seguente funzione è subarmonica su $\mathbb{R}^2$.*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \qquad \varphi(x) := \ln|x|.$$

Proposizione. *Sia Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.
Allora, per ogni funzione olomorfa $h : \Omega \to \mathbb{C}$, la funzione $f = \ln|h|$ è subarmonica su Ω.*

8. Funzioni subarmoniche II

8.1. Definizioni equivalenti.

Teorema. *Siano Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione Lebesgue misurabile. Allora sono equivalenti:*

(1) $\Delta u \geq 0$ *in senso delle distribuzioni, ovvero:*

$$\int_\Omega u(x)\Delta\varphi(x)\,dx \geq 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \varphi \geq 0.$$

(2) *for every $x_0 \in \Omega$ la funzione*

$$M : \big(0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)\big) \to \mathbb{R}\ , \qquad M(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx$$

è crescente sull'intervallo $\big(0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)\big)$.

8.2. Insieme polare di una funzione subarmonica.

Proposizione. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme aperto e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica su Ω. Allora, la funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è semicontinua superiormente.*

Proposizione. *Esiste una funzione $u \in H^1_0(B_1)$ tale che:*

- *u è subarmonica in B_1;*
- *$u(0) = -\infty$.*