Principio del massimo forte

Principio del massimo forte

Teorema 1. *Siano $u : B_R \to \mathbb{R}$ e $v : B_R \to \mathbb{R}$ due funzioni armoniche tali che*

$$u(0) = v(0) \qquad e \qquad u \geq v \quad su \quad B_R.$$

Allora,

$$u \equiv v \quad in \quad B_R.$$

Dimostrazione. Per il teorema della media, abbiamo

$$0 = u(0) - v(0) = \frac{1}{B_R} \int_{B_R} \big(u(x) - v(x)\big)\, dx.$$

Siccome $u - v \geq 0$, abbiamo che $u \equiv v$ on B_R. □

Corollario 2. *Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{R}^d$. Siano $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ due funzioni armoniche tali che*

$$u \geq v \quad in \quad \Omega.$$

Allora,

$$u \equiv v \quad in \quad \Omega \qquad oppure \qquad u > v \quad in \quad \Omega.$$

Corollario 3. *Sia Ω un aperto connesso in $\mathbb{R}^d$. Siano $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ due funzioni armoniche tali che*

$$u \geq 0 \quad in \quad \Omega.$$

Allora,

$$u \equiv 0 \quad in \quad \Omega \qquad oppure \qquad u > 0 \quad in \quad \Omega.$$

Corollario 4. *Sia Ω un aperto limitato e connesso in $\mathbb{R}^d$. Siano $g \in H^1(\Omega)$ una funzione non-negativa su Ω ed $u \in H^1(\Omega)$ la soluzione del problema*

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \Omega\,, \qquad u - g \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Allora,

$$u \equiv 0 \quad in \quad \Omega \qquad oppure \qquad u > 0 \quad in \quad \Omega.$$

Un'applicazione

Proposizione 5. *Consideriamo il rettangolo $\mathcal{R} = (-1, 1) \times (0, 1)$ in $\mathbb{R}^2$. Siano*

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ , \quad g(x, y) = |x|,$$

ed $u \in H^1(\mathcal{R})$ la soluzione del problema

$$\Delta u = 0 \quad in \quad \mathcal{R}\ , \qquad u = g \quad su \quad \partial\mathcal{R}.$$

Allora

$$u > g \quad in \quad \mathcal{R}.$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\mathcal{R}_+ := (0, 1) \times (0, 1) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_- := (-1, 0) \times (0, 1)$$

Osserviamo che, siccome $u > 0$ in $\mathcal{R}$, si ha

$$u > g \quad \text{su} \quad \{(0, y)\ :\ 0 < y < 1\}.$$

Ora, u e g sono entrambe armoniche su $\mathcal{R}_+$, $u \geq g$ su $\partial\mathcal{R}_+$. Per il principio del massimo debole abbiamo che $u \geq g$ su $\mathcal{R}_+$. Per il principio del massimo forte, $u > g$ su $\mathcal{R}_+$. □