Soprasoluzioni, sottosoluzioni e teorema della media

Soprasoluzioni e sottosoluzioni

Definizione 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Diciamo che*

$$\Delta u + f \geq 0 \quad in \quad \Omega,$$

se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ su Ω, si ha

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega f\varphi \, dx \geq 0.$$

Analogamente, diciamo che

$$\Delta u + f \leq 0 \quad in \quad \Omega,$$

se per ogni $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ su Ω, si ha

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega f\varphi \, dx \leq 0.$$

Approssimazione di soprasoluzioni e sottosoluzioni

Fissiamo una funzione $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ tale che

$$\phi \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d, \qquad \phi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_1, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, dx = 1,$$

e tale che

$$\phi(x) = \phi(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\phi(x/\varepsilon).$$

Allora,

$$\phi_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d), \qquad \phi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d, \qquad \phi_\varepsilon = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_1, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_\varepsilon(x)\, dx = 1$$

ed è tale che

$$\phi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(-x) \quad \text{per ogni} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed un $\delta > 0$, definiamo

$$\Omega_\delta := \Big\{x \in \Omega \ : \ B_\delta(x) \subset \Omega\Big\} = \Big\{x \in \Omega \ : \ \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta\Big\}.$$

Date

una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e due costanti $0 < \varepsilon < \delta$,

definiamo la *convoluzione*

$$u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R},$$

come

$$u * \phi_\varepsilon(x) := \int_\Omega \phi_\varepsilon(x - y) u(y)\, dy.$$

È noto che, fissato ε,

- La funzione $u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ è continua (per il teorema della convergenza dominata).
- La funzione $u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ è differenziabile su Ω_δ e
$$\partial_j\big(u * \phi_\varepsilon\big) = u * \partial_j \phi_\varepsilon.$$
- La funzione $u * \phi_\varepsilon : \Omega_\delta \to \mathbb{R}$ è C^∞ su Ω_δ.
- Se $u \in H^1(\Omega)$, allora
$$\partial_j(u * \phi_\varepsilon) = (\partial_j u) * \phi_\varepsilon.$$

Inoltre, fissato $\delta > 0$,

$u * \phi_\varepsilon$ converge da u fortemente in $H^1(\Omega_\delta)$, per $\varepsilon \to 0$.

Proposizione 2. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Siano $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1(\Omega)$.*
Fissate due costanti $0 < \varepsilon < \delta$, abbiamo che:

(1) *Se $\Delta u + f \geq 0$ in Ω, allora $\Delta(u * \phi_\varepsilon) + f * \phi_\varepsilon \geq 0$ in Ω_δ.*
(2) *Se $\Delta u + f \leq 0$ in Ω, allora $\Delta(u * \phi_\varepsilon) + f * \phi_\varepsilon \leq 0$ in Ω_δ.*

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Sia $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\delta)$ una funzione non-negativa. Allora,

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Omega_\delta} \nabla(u * \phi_\varepsilon) \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\Omega_\delta} (f * \phi_\varepsilon)\varphi \, dx \\
&\qquad = -\int_{\Omega_\delta} \Big((\nabla u) * \phi_\varepsilon\Big) \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\Omega_\delta} (f * \phi_\varepsilon)\varphi \, dx \\
&\qquad = -\int\int \nabla u(y)\phi_\varepsilon(x-y) \cdot \nabla\varphi(x) \, dy \, dx + \int\int f(y)\phi_\varepsilon(x-y)\varphi(y) \, dy \, dx \\
&\qquad = -\int\int \nabla u(y)\phi_\varepsilon(y-x) \cdot \nabla\varphi(x) \, dy \, dx + \int\int f(y)\phi_\varepsilon(y-x)\varphi(y) \, dy \, dx \\
&\qquad = -\int_\Omega \nabla u(y) \cdot \nabla(\varphi * \phi_\varepsilon)(y) \, dy + \int_\Omega f(y)(\varphi * \phi_\varepsilon)(y) \, dy,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\varphi * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$. Ora, siccome φ e ϕ_ε sono entrambe nonnegative, anche $\varphi * \phi_\varepsilon$ è nonnegativa. Quindi, per ipotesi

$$-\int_\Omega \nabla u(y) \cdot \nabla(\varphi * \phi_\varepsilon)(y) \, dy + \int_\Omega f(y)(\varphi * \phi_\varepsilon)(y) \, dy \geq 0,$$

e dunque $\Delta u + f \geq 0$. $\square$

Teorema della media

Lemma 3. *[Funzioni regolari] Sia φ una funzione di classe C^2 su B_R. Allora, per ogni $0 < r < R$ si ha*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r} \varphi\right] = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r} \Delta\varphi(x) \, dx$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B_r} \varphi\right] &= \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1} \varphi(r\theta) \, d\theta\right] = \frac{1}{d\omega_d}\int_{\partial B_1} \theta \cdot \nabla\varphi(r\theta) \, d\theta \\
&= \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{\partial B_r} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla\varphi(x) \, d\mathcal{H}^{d-1}(x) = \frac{1}{d\omega_d r^{d-1}} \int_{B_r} \Delta\varphi(x) \, dx. \quad \square
\end{aligned}$$

Proposizione 4. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1(\Omega)$ e $f \in L^2(\Omega)$.*

(1) *Se $\Delta u + f \geq 0$ in Ω, allora*

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u \geq \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \left(-\int_{B_s(x_0)} f(x) \, dx\right) ds \qquad \textit{per ogni} \qquad B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \Subset \Omega.$$

(2) *Se $\Delta u + f \leq 0$ in Ω, allora*

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u \leq \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \left(-\int_{B_s(x_0)} f(x) \, dx\right) ds \qquad \textit{per ogni} \qquad B_r(x_0) \subset B_R(x_0) \Subset \Omega.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Consideriamo la funzione $u * \phi_\varepsilon$. Siccome $\overline{B}_R(x_0) \subset \Omega$, la funzione $u * \phi_\varepsilon$ è definita su $B_R(x_0)$ per ε abbastanza piccolo e

$$u * \phi_\varepsilon \to u \quad \text{fortemente in} \quad H^1(B_R(x_0)).$$

Inolte, applicando Lemma 3 alla funzione $u * \phi_\varepsilon$, otteniamo che

$$\fint_{\partial B_R(x_0)} u * \phi_\varepsilon - \fint_{\partial B_r(x_0)} u * \phi_\varepsilon \geq \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \left(-\int_{B_s(x_0)} (f * \phi_\varepsilon)(x) \, dx\right) ds.$$

Passando al limite per $R \to 0$, otteniamo la tesi. $\square$

Proposizione 5. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $u \in H^1(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p > d/2$.*

(1) *Se $\Delta u + f \geq 0$ in Ω, allora per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste il limite*
$$L(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx,$$
e si ha che
$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx - u(x_0) \geq -C_{d,p} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p},$$
dove $C_{d,p}$ è una costante che dipende soltanto da d e p.

(2) *Se $\Delta u + f \leq 0$ in Ω, allora per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste il limite*
$$L(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx,$$
e si ha che
$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx - u(x_0) \leq C_{d,p} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p},$$
dove $C_{d,p}$ è una costante che dipende soltanto da d e p.

Dimostrazione. Dimostriamo (1). Usando la proposizione precedente, abbiamo che
$$\begin{aligned}
\fint_{\partial B_R(x_0)} u - \fint_{\partial B_r(x_0)} u &\geq \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \left(- \int_{B_s(x_0)} f(x)\,dx \right) ds \\
&\geq - \int_r^R \frac{1}{d\omega_d s^{d-1}} \|f\|_{L^p(\Omega)} |B_s|^{1-1/p}\,ds \\
&\geq - \frac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{d\omega_d^{1/p}} \int_r^R \frac{s^{d-d/p}}{s^{d-1}}\,ds \\
&= - \frac{p\|f\|_{L^p(\Omega)}}{d\omega_d^{1/p}(2p-d)} \Big(R^{2-d/p} - r^{2-d/p} \Big).
\end{aligned}$$
In particolare, la funzione
$$r \mapsto \fint_{\partial B_r(x_0)} u + \frac{p\|f\|_{L^p(\Omega)}}{d\omega_d^{1/p}(2p-d)} r^{2-d/p},$$
è crescente in r e quindi esiste il limite
$$L(x_0) = \lim_{r\to 0} \Big(\fint_{\partial B_r(x_0)} u + \frac{p\|f\|_{L^p(\Omega)}}{d\omega_d^{1/p}(2p-d)} R^{2-d/p} \Big)$$
Di conseguenza, si ha anche
$$L(x_0) = \lim_{r\to 0} \fint_{\partial B_r(x_0)} u\,,$$
e
$$\fint_{\partial B_r(x_0)} u - L(x_0) \geq - \frac{p\|f\|_{L^p(\Omega)}}{d\omega_d^{1/p}(2p-d)} r^{2-d/p}, \tag{1}$$
per tutti gli $R > 0$ tali che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Integrando in $r \in [0, R]$, otteniamo che
$$L(x_0) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u.$$
In particolare, possiamo definire u **ovunque** in Ω come
$$u(x_0) = \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u.$$
Integrando anche (1), si ottiene
$$\fint_{B_R(x_0)} u - u(x_0) \geq -C_{d,p} \|f\|_{L^p(\Omega)} R^{2-d/p},$$
per tutti gli $R > 0$ tali che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$. $\square$