Regolarità interna delle funzione armoniche

Teorema 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ ed $u \in H^1(\Omega)$ una funzione armonica in Ω. Allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\phi \equiv 1 \quad \text{in} \quad [-1,1]\,, \qquad \phi \equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus (-2,2), \qquad 0 \le \phi \le 1 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}\,.$$

Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ come

$$\varphi(x) = \frac{1}{c}\phi(|x|),$$

dove

$$c := d\omega_d \int_0^{+\infty} r^{d-1}\phi(r)\,dr.$$

In particolare,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\big({}^x\!/\!_\varepsilon\big).$$

Allora,

$$\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Considerimo ora la convoluzione

$$\varphi_\varepsilon * u(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy,$$

definita per ogni $x \in \Omega_\varepsilon$, dove

$$\Omega_\varepsilon := \Big\{x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\Big\}.$$

È noto che $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. D'altra parte,

$$\begin{aligned}
\varphi_\varepsilon * u(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y)u(x-y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(-y)u(x+y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y)u(x+y)\,dy \\
&= \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{\partial B_1} \varphi_\varepsilon(r\theta)u(x+r\theta)\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{d-1}\phi_\varepsilon(r) \int_{\partial B_1} u(x+r\theta)\,d\theta\,dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{d-1}\phi_\varepsilon(r)d\omega_d \left(\fint_{\partial B_r(x)} u\,d\mathcal{H}^{d-1} \right) dr \\
&= \int_0^{+\infty} r^{d-1}\phi_\varepsilon(r)d\omega_d\,dr\,u(x) = u(x).
\end{aligned}$$

Quindi $\varphi_\varepsilon * u$ e u coincidono su Ω_ε. Di conseguenza, u è C^∞ su Ω_ε. $\square$