

## REGOLARITÀ HÖLDER INTERNA VIA LA PROPRIETÀ DELLA MEDIA

**Lemma 1.** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^d$ ,  $f \in L^p(\Omega)$  per un qualche  $p \geq d/2$  ed  $u \in H^1(\Omega)$  una soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega.$$

Allora, la funzione  $u$  è definita puntualmente ovunque in  $\Omega$  come

$$u(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \quad \text{per ogni } x_0 \in \Omega.$$

Inoltre, esiste una costante dimensionale  $C_d$  tale che

$$\left| \int_{B_r(x_0)} u - u(0) \right| \leq \frac{p C_d}{2p - d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p},$$

per ogni  $x_0 \in \Omega$  ed ogni  $r > 0$  tale che  $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$ .

**Lemma 2.** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^d$  ed  $u \in H^1(\Omega)$  una funzione nonnegativa e limitata in  $\Omega$

$$0 \leq u \leq M \quad \text{in } \Omega,$$

ed una soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove  $f \in L^p(\Omega)$  per un qualche  $p > d/2$ . Allora, per ogni  $\delta > 0$  esiste una costante  $\varepsilon > 0$  tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in \Omega_\delta \quad \text{tali che } |x - y| \leq \varepsilon,$$

dove

$$\Omega_\delta := \left\{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \delta \right\},$$

$$\alpha = \frac{2p - d}{3p - d}$$

e la costante  $C$  è data da

$$C = C_d \left( \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{p \|f\|_{L^p(\Omega)}}{2p - d} \right),$$

dove  $C_d$  è una costante dimensionale.

*Dimostrazione.* Siano  $x, y \in \Omega_\delta$  due punti a distanza

$$|x - y| \leq \varepsilon,$$

dove  $\varepsilon$  sarà scelto in seguito. Usando il lemma precedente calcoliamo

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u + \frac{p C_d \|f\|_p}{2p - d} r^{2-d/p} - u(y) \\ &\leq \frac{R^d}{r^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u + \frac{p C_d \|f\|_p}{2p - d} r^{2-d/p} - u(y), \end{aligned}$$

dove

$$R := r + |x - y| \leq r + \varepsilon,$$

e dove  $r$  ed  $\varepsilon$  saranno scelti in modo tale che

$$r + \varepsilon < \delta,$$

il che assicura che

$$B_r(x) \subset B_R(y) \subset \Omega.$$

Ora, riscriviamo la disuguaglianza di sopra come

$$\begin{aligned}
u(x) - u(y) &\leq \frac{R^d - r^d}{r^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u + \frac{p C_d \|f\|_p}{2p - d} r^{2-d/p} - u(y) + \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u \\
&\leq \frac{R^d - r^d}{r^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u + \frac{p C_d \|f\|_p}{2p - d} r^{2-d/p} + \frac{p C_d \|f\|_p}{2p - d} R^{2-d/p} \\
&\leq \frac{R^d - r^d}{r^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u + \frac{2p C_d \|f\|_p}{2p - d} R^{2-d/p} \\
&\leq \frac{(R - r) d R^{d-1}}{r^d} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R(y)} u + \frac{2p C_d \|f\|_p}{2p - d} R^{2-d/p} \\
&= \frac{|x - y| d R^{d-1}}{r} \frac{1}{r^{d-1} |B_R|} \int_{B_R(y)} u + \frac{2p C_d \|f\|_p}{2p - d} R^{2-d/p} \\
&\leq \frac{|x - y| d R^{d-1}}{r} M + \frac{2p C_d \|f\|_p}{2p - d} R^{2-d/p}.
\end{aligned}$$

Scegliendo

$$r := |x - y|^\sigma \quad \text{con} \quad \sigma \in (0, 1),$$

otteniamo  $R = r + |x - y| \leq 2r$  e

$$\begin{aligned}
u(x) - u(y) &\leq \frac{|x - y|}{|x - y|^\sigma} d 2^{d-1} M + \frac{2p C_d \|f\|_p}{2p - d} 2^{2-d/p} |x - y|^{\sigma(2-d/p)} \\
&\leq |x - y|^{1-\sigma} d 2^{d-1} M + \frac{8p C_d \|f\|_p}{2p - d} |x - y|^{\sigma(2-d/p)}.
\end{aligned}$$

Scegliamo ora  $\sigma$  in modo tale che

$$1 - \sigma = \sigma(2 - d/p),$$

ovvero

$$\sigma := \frac{p}{3p - d}.$$

Si ha quindi,

$$u(x) - u(y) \leq \left( d 2^{d-1} M + \frac{8p C_d \|f\|_p}{2p - d} \right) |x - y|^{\frac{2p-d}{3p-d}}.$$

Infine, osserviamo che possiamo scegliere  $\varepsilon$  in modo tale da avere

$$\delta \geq 2\varepsilon^\sigma > \varepsilon + \varepsilon^\sigma > |x - y|^\sigma + |x - y| = r + |x - y|,$$

ovvero basta prendere

$$\varepsilon := \left( \delta/2 \right)^{\frac{3p-d}{p}}.$$

□

Come corollario immediato abbiamo la seguente proposizione.

**Corollario 3.** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^d$  e sia  $u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  una soluzione debole di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega,$$

dove  $f \in L^p(\Omega)$  per un qualche  $p > d/2$ . Allora, esiste una costante dimensionale  $C_d$  tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C_d \left( \operatorname{osc}_\Omega u + \frac{p \|f\|_{L^p(B_1)}}{2p - d} \right) |x - y|^\alpha,$$

per ogni  $x, y \in \Omega_\delta$  tali che  $|x - y| \leq \left( \delta/2 \right)^{\frac{3p-d}{p}}$ , dove  $\alpha := \frac{2p-d}{3p-d}$ .