Regolarità Hölder al bordo via la proprietà della media

Estensione della soluzione di una PDE

Lemma 1. *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \geq d/2$ ed $u \in H^1_0(\Omega)$ la soluzione di*

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Supponiamo inoltre che

$$u \geq 0 \quad \text{su} \quad \Omega\,.$$

Allora

$$\Delta u + f \mathbb{1}_{\{u>0\}} \geq 0 \quad \text{su} \quad \mathbb{R}^d\,.$$

In particolare, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$u(x_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx\,,$$

e che esiste una costante dimensionale $C_d > 0$ tale che

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \geq u(x_0) - \frac{p\,C_d}{2p-d} \|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p}.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$, consideriamo una funzione $p_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{cases} p_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{se} \quad t \leq 0, \\ p_\varepsilon(t) = 1 \quad \text{se} \quad t \geq \varepsilon, \\ 0 \leq p_\varepsilon(t) \leq 1 \quad \text{se} \quad t \geq \varepsilon, \\ p'_\varepsilon(t) \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Allora, $p_\varepsilon(u) \in H^1_0(\Omega)$. In particolare, data una funzione $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ in Ω, abbiamo che

$$p_\varepsilon(u)\varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Di conseguenza,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\big(p_\varepsilon(u)\varphi\big)\,dx = \int_\Omega f p_\varepsilon(u)\varphi\,dx,$$

e quindi

$$\int_\Omega p_\varepsilon(u)\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \varphi p'_\varepsilon(u)|\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega f p_\varepsilon(u)\varphi\,dx.$$

Siccome $\varphi \geq 0$ e $p'_\varepsilon(u) \geq 0$, otteniamo

$$-\int_\Omega p_\varepsilon(u)\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega f p_\varepsilon(u)\varphi\,dx \geq 0.$$

Ora, passando al limite per $\varepsilon \to 0$,

$$p_\varepsilon(u) \to \mathbb{1}_{\{u>0\}}$$

Lebesgue quasi-ovunque e (per ma convergenza dominata) forte in L^1. Di conseguenza,

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx + \int_\Omega f \mathbb{1}_{\{u>0\}}\varphi\,dx \geq 0,$$

che conclude la dimostrazione. $\square$

Regolarità fino al bordo

Lemma 2. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che soddisfa la stima di densita esterna, ovvero supponiamo che*

esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$\big|B_r(x_0) \cap \Omega\big| \le (1-c)|B_r|.$$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione nonnegativa e tale che $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \ge d/2$. Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Allora, esistono due costanti, β (che dipende da p, d e c_0) e C (che dipende da p, d, c_0 e r_0), tali che

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \le r^\beta C\Big(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\Big) \qquad \text{per ogni} \qquad r \le r_0.$$

Dimostrazione. Consideriamo una costanyte $a \in (0,1)$ che sceglieremo in seguito e definiamo

$$r_n := r_0 a^n \qquad \text{per} \qquad n \ge 0.$$

Sia $x_0 \in \partial\Omega$. Allora, per ogni $x \in B_{r_{n+1}}(x_0)$, abbiamo

$$u(x) \le \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x)} u(x)\,dx + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r^{2-d/p},$$

dove scegliamo

$$r := r_n - r_{n+1} = (1-a)r_n$$

in modo tale da avere

$$B_r(x) \subset B_{r_n}(x_0).$$

Siccome $u \ge 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
u(x) &\le \frac{r_n^d}{(r_n - r_{n+1})^d}\frac{1}{|B_{r_n}|}\int_{B_{r_n}(x)} u(x)\,dx + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p}\\
&\le \frac{1}{(1-a)^d}\frac{1}{|B_{r_n}|}\int_{B_{r_n}(x)} u(x)\,dx + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p}\\
&\le \frac{1}{(1-a)^d}\frac{|\Omega \cap B_{r_n}(x_0)|}{|B_{r_n}|}\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p}\\
&\le \frac{1-c_0}{(1-a)^d}\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_n^{2-d/p}.
\end{aligned}$$

Siccome $x \in B_{r_{n+1}}(x_0)$ è arbitrario, otteniamo

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r_{n+1}}(x_0))} \le \frac{1-c_0}{(1-a)^d}\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} a^{n(2-d/p)}.$$

Ora, per un qualche $b > 1$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
b^{n+1}\|u\|_{L^\infty(B_{r_{n+1}}(x_0))} &\le b^{n+1}\Big(\frac{1-c_0}{(1-a)^d}\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} a^{n(2-d/p)}\Big)\\
&\le \frac{b(1-c_0)}{(1-a)^d}\Big(b^n\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))}\Big) + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p} b^{n+1} a^{n(2-d/p)}.
\end{aligned}$$

Scegliamo b tale che

$$\frac{b(1-c_0)}{(1-a)^d} = 1.$$

Quindi

$$b^{n+1}\|u\|_{L^\infty(B_{r_{n+1}}(x_0))} \le b^n\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} + \frac{p\,C_d}{2p-d}\|f\|_{L^p(\Omega)} r_0^{2-d/p}\frac{(1-a)^d}{1-c_0}\Big(\frac{(1-a)^d}{1-c_0}a^{2-d/p}\Big)^n.$$

Ora scegliamo $a > 0$ abbastanza piccolo in modo da avere

$$\frac{1-c_0}{(1-a)^d} < 1 \quad (\text{quindi } b > 1) \qquad \text{e} \qquad \frac{(1-a)^d}{1-c_0}a^{2-d/p} < 1\,.$$

Quindi, esiste una costante C che dipende da d, p, c_0 ed r_0 tale che

$$b^n\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} \le \|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0))} + C\|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{per ogni} \quad n \ge 0.$$

Di conseguenza, esiste $\beta > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(B_{r_n}(x_0))} \le \left({}^{r_n}\!/\!{}_{r_0}\right)^\beta \Big(\|u\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0))} + C\|f\|_{L^p(\Omega)}\Big) \quad \text{per ogni} \quad n \ge 0,$$

e quindi

$$\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \le \left({}^{r}\!/\!{}_{r_0}\right)^\beta \Big(b\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + C\|f\|_{L^p(\Omega)}\Big) \quad \text{per ogni} \quad r \le r_0.$$

□

Proposizione 3. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ che ha la stima di densita esterna, ovvero supponiamo che*

esistono due costanti $r_0 > 0$ e $c \in (0,1)$ tali che

per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $r \in (0, r_0)$ si ha la stima

$$\big|B_r(x_0) \cap \Omega\big| \le (1-c)|B_r|.$$

Siano $f \in L^p(\Omega)$ per un qualche $p \ge {}^{d}\!/\!{}_{2}$ ed $u \in H^1_0(\Omega)$ la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H^1_0(\Omega)\,.$$

Allora, esistono $\alpha \in (0,1)$, $C > 0$ e $\delta > 0$ che dipendono solo da p, d, c_0 ed r_0, tali che

$$|u(x) - u(y)| \le C\Big(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\Big)|x-y|^\alpha \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^d \quad \text{tali che} \quad |x-y| \le \delta.$$