Funzioni armoniche: un'identità importante

Teorema 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $g \in H^1(\Omega)$ una unzione non-negativa. Sia h la funzione armonica*

$$\Delta h = 0 \quad in \quad \Omega, \qquad h = g \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora, per ogni funzione $u \in H^1(\Omega)$, tale che $u - g \in H^1_0(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla h|^2\,dx = \int_\Omega |\nabla(u-h)|^2\,dx.$$

Dimostrazione. Per ogni coppia di vettori $X, Y \in \mathbb{R}^d$ si ha

$$|X|^2 - |Y|^2 = |X-Y|^2 + 2Y\cdot(X-Y).$$

Di conseguenza,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega |\nabla h|^2 = \int_\Omega |\nabla(u-h)|^2\,dx + 2\int_\Omega \nabla h\cdot\nabla(u-h)\,dx\,.$$

Ora, siccome $u - h \in H^1_0(\Omega)$ e $\Delta h = 0$ in Ω, abbiamo che

$$\int_\Omega \nabla h\cdot\nabla(u-h)\,dx = 0,$$

il che conclude la dimostrazione. □