Esercizi sul teorema di Serrin

Una versione del teorema di Serrin su triangoli

Esercizio 1. *Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangolo con vertici A, B e C. Sia w la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad T \ , \qquad w = 0 \quad su \quad \partial T.$$

Dimostrare che se

$$\int_A^B |\nabla w|^2 = \int_B^C |\nabla w|^2 = \int_C^A |\nabla w|^2,$$

allora T è equilatero.

Soluzioni di $-\Delta w = 1$ in domini convessi

Definizione 2. *Sia Ω un convesso di $\mathbb{R}^d$. Definiamo il diametro e l'ampiezzza di Ω come:*

$$\mathrm{diam}(\Omega) := \sup \big\{ |x-y| \ : \ x, y \in \Omega \big\}.$$

$$\mathrm{width}(\Omega) := \inf_{\nu \in \partial B_1} \Big\{ \sup \big\{ \nu \cdot (x-y) \ : \ x, y \in \Omega \big\} \Big\}.$$

Esercizio 3. *Sia Ω un aperto convesso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia w la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad \Omega \ , \qquad w = 0 \quad su \quad \partial \Omega.$$

Dimostrare che

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{8} \mathrm{width}(\Omega).$$

Esercizio 4. *Sia Ω un aperto convesso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia w la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad \Omega \ , \qquad w = 0 \quad su \quad \partial \Omega.$$

Dimostrare che

$$\|\nabla w\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{2} \mathrm{diam}(\Omega).$$

Teorema 5. *Sia Ω un aperto convesso e limitato di $\mathbb{R}^2$ e sia w la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad \Omega \ , \qquad w = 0 \quad su \quad \partial \Omega.$$

Allora

$$\|\nabla w\|_{L^\infty(\Omega)} \le \frac{1}{2} \mathrm{width}(\Omega).$$

Lemma 6. *Sia P un parallelogrammo con vertici A, B, C e D. Sia w la soluzione di*

$$-\Delta w = 1 \quad in \quad P \ , \qquad w = 0 \quad su \quad \partial P.$$

Allora il massimo di $|\nabla w|$ è raggiunto sul lato più lungo del parallelogrammo.