Funzioni armoniche in domini con angolo

Funzioni armoniche su coni

In seguito useremo la notazione Ω_α per il cono di anglolo $0 < \alpha < 2\pi$ in $\mathbb{R}^2$, in coordinate polari

$$\Omega_\alpha = \{(r, \theta)\ :\ r > 0,\ 0 < \theta < \alpha\}.$$

Proposizione 1. *Sia $0 < \alpha < 2\pi$ e sia u una funzione armonica e positiva in $\Omega_\alpha \cap B_1$, e zero su $\partial\Omega_\alpha \cap B_1$.*

(a) *Per ogni raggio $0 < R < 1/2$ esistono due costanti $0 < c < C$ tali che*

$$c\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) \le u(r,\theta) \le C\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) \quad \textit{per ogni} \quad (r,\theta) \in \Omega_\alpha \cap B_R.$$

(b) *Siano*

- *$c(R)$ la più grande costante c tale che*

$$c\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) \le u(r,\theta) \quad \textit{per ogni} \quad (r,\theta) \in \Omega_\alpha \cap B_R.$$

- *$C(R)$ la più piccola costante C tale che*

$$u(r,\theta) \le C\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) \quad \textit{per ogni} \quad (r,\theta) \in \Omega_\alpha \cap B_R.$$

Allora le funzioni $c(R)$ e $C(R)$ sono monotone (risp. crescente e decrescente).

(c) *Esiste una costante $\varepsilon > 0$ che dipende solo da α tale che*

$$C(R/2) - c(R/2) \le (1-\varepsilon)\big(C(R) - c(R)\big),$$

per ogni $R \le 1/2$.

(d) *Esiste (ed è un numero reale positivo) il limite*

$$\lim_{R\to 0} c(R) = \ell = \lim_{R\to 0} C(R)$$

e si ha che

$$u(r,\theta) = \ell\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) + o\big(r^{\pi/\alpha}\big).$$

Corollario 2. *Sia $0 < \alpha < 2\pi$ e sia (come sopra) Ω_α il cono di anglolo α in $\mathbb{R}^2$. Sia u una funzione armonica (non necessariamente positiva) in $\Omega_\alpha \cap B_1$, e zero su $\partial\Omega_\alpha \cap B_1$. Allora esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che*

$$u(r,\theta) = \ell\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) + o\big(r^{\pi/\alpha}\big).$$

Funzioni armoniche su domini $C^{1,\alpha}$ a tratti in $\mathbb{R}^2$

Proposizione 3. *Sia $0 < \alpha < 2\pi$ una costante e siano*

$$g_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad e \quad g_\alpha : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

due funzioni $C^{1,\alpha}$ tali che

$$g_0(0) = 0\ ,\quad g_\alpha(0) = \alpha\ ,\quad g_0'(0) = g_\alpha'(0) = 0\ .$$

Sia Ω il dominio

$$\Omega = \Big\{(r,\theta)\ :\ r > 0,\ g_0(r) < \theta < g_\alpha(r)\Big\}.$$

Sia u una funzione armonica in $\Omega \cap B_1$ e zero su $\partial\Omega \cap B_1$. Allora, esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(r,\theta) = \ell\, r^{\pi/\alpha} \sin\Big(\frac{\pi}{\alpha}\theta\Big) + o\big(r^{\pi/\alpha}\big).$$

Se inoltre u è positiva su $\Omega \cap B_1$, allora $\ell > 0$.