

LA FORMULA DI WEISS

Per ogni $u \in H^1(B_r(x_0))$ definiamo il funzionale

$$W(u, r, x_0) := \frac{1}{r^d} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{r^{d+1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Data una funzione $u \in B_r(x_0)$, possiamo definire

$$u_{r,x_0} \in H^1(B_1), \quad u_{r,x_0}(x) = \frac{1}{r} u(x_0 + rx).$$

Quando $x_0 = 0$, scriveremo semplicemente

$$u_r(x) := u_{r,0}(x) = \frac{1}{r} u(rx).$$

Osserviamo che si ha la relazione

$$(u_{r,x_0})_s = u_{sr,x_0}.$$

Osserviamo che vale l'identità

$$W(u, r, x_0) = W(u_{r,x_0}, 1, 0).$$

Scriveremo semplicemente

$$W(v) := W(v, 1, 0) \quad \text{per ogni funzione } v \in B_1.$$

Lemma 1 (Formula di Weiss). *Siano $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in C^\infty(B_R(x_0))$. Allora*

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_{x_0,r}) = \frac{d}{r} (W(z_{x_0,r}) - W(u_{x_0,r})) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_{x_0,r} - u_{x_0,r}|^2 d\mathcal{H}^{d-1},$$

dove $z_{x_0,r} : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ è l'estensione 1-omogenea di $u_{x_0,r}$ in B_1 , ovvero

$$z_{x_0,r}(x) := |x| u_{x_0,r}(x/|x|).$$

Proof. Supponiamo che $x_0 = 0$. Dato $r \in (0, R)$, useremo la notazione

$$u_r(x) = \frac{1}{r} u(rx).$$

Osserviamo che la funzione $r \mapsto \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx$ è differenziabile e che si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^d} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \right) &= -\frac{d}{r^{d+1}} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{r^d} \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^{d-1} \\ (1) \quad &= -\frac{d}{r^{d+1}} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |\nabla u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il termine di bordo, prima calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} u^2(x) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial B_1} u(ry)^2 d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ &= 2 \int_{\partial B_1} u(ry) y \cdot \nabla u(ry) d\mathcal{H}^{d-1}(y) \\ &= 2r \int_{\partial B_1} u_r(x \cdot \nabla u_r) d\mathcal{H}^{d-1}(x) \end{aligned}$$

e quindi abbiamo

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{d+1}} \int_{\partial B_r} u^2 d\mathcal{H}^{d-1} \right) = -\frac{2}{r^{d+2}} \int_{\partial B_r} u^2 d\mathcal{H}^{d-1} + \frac{2}{r} \int_{\partial B_1} u_r(x \cdot \nabla u_r) d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Consideriamo ora l'estensione omogenea

$$z_r : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

della funzione

$$u_r : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Possiamo scrivere z_r on coordinate polari come $\rho \in (0, 1]$, $\theta \in \mathbb{S}^{d-1}$ come

$$z_r(\rho, \theta) = \rho z_r(1, \theta).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} W(z_r) &= \int_{B_1} |\nabla z_r|^2 dx - \int_{\partial B_1} z_r^2 d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_0^1 r^{d-1} dr \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (z_r^2(1, \theta) + |\nabla_\theta z_r|^2) d\theta - \int_{\mathbb{S}^{d-1}} z_r^2(1, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\nabla_\theta z_r|^2 d\theta - \frac{d-1}{d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} z_r^2(1, \theta) d\theta \\ (3) \quad &= \frac{1}{d} \int_{\partial B_1} (|\nabla u_r|^2 - (x \cdot \nabla u_r)^2) d\mathcal{H}^{d-1} - \frac{d-1}{d} \int_{\partial B_1} u_r^2 d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned}$$

Mettendo insieme (3), (2) e (1), otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial r} W(u_r) = \frac{d}{r} (W(z_r) - W(u_r)) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_r - u_r|^2 d\mathcal{H}^{d-1}.$$

□

Teorema 2 (Formula di Weiss). *Siano $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R(x_0))$. Allora, la funzione*

$$r \mapsto W(u_{r,x_0})$$

è assolutamente continua su ogni intervallo $[s, S] \subset (0, R)$ e si ha

$$W(u_{x_0,S}) - W(u_{x_0,s}) = \int_s^S \left(\frac{d}{r} (W(z_{x_0,r}) - W(u_{x_0,r})) + \frac{1}{r} \int_{\partial B_1} |x \cdot \nabla u_{x_0,r} - u_{x_0,r}|^2 d\mathcal{H}^{d-1} \right) dr,$$

dove $z_{x_0,r} : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ è l'estensione 1-omogenea di $u_{x_0,r}$ in B_1 , ovvero

$$z_{x_0,r}(x) := |x| u_{x_0,r}(x/|x|).$$

BIBLIOGRAFIA

La formula del Lemma 1 è stata introdotta da G. Weiss nell'ambito di diversi problemi a frontiera libera. Ecco due dei lavori originali.

- [1] G. S. Weiss. *Partial regularity for a minimum problem with free boundary*. J. Geom. Anal. **9** (2) (1999), 317–326.
- [2] G. S. Weiss. *A homogeneity improvement approach to the obstacle problem*. Invent. Math. **138** (1) (1999), 23–50.